PEDAGOŠKI ZAVOD TUZLANSKOG KANTONA

ZBIRKA ZADATAKA IZ MATEMATIKE

PRIPREMA ZA TAKMIČENJE

ZA UČENIKE OD VI DO IX RAZREDA

Tuzla, januara 2020. godine

Zbirka zadataka iz matematike za pripremu učenika osnovnih škola za takmičenje

Godina 2016. Poboljšana 2020.

Izdavač:

Pedagoški zavod Tuzlanskog kantona
Bosne srebrene br. 119.
75 000 Tuzla
www.pztz.ba

Za izdavača:

Mr.sc. Nikola Čiča, direktor Zavoda

Urednici:

Dr.sc. Hariz Agić, Savjetnik za obrazovanje u PZTK i
Edis Ćatibušić, profesor matematike

Ispravke i poboljšanja uredili:

Mr.sc. Kristina Nurkanović, profesor matematike
Nedžad Udvinčić, profesor matematike
Mr.sc. Sanela Buljubašić, profesor matematike i fizike

Objavljeno na: www.pztz.ba

U izradi zbirke učestvovali su nastavnici:

Sanela Buljubašić, *Prva osnovna škola Srebrenik,* Olgica Bešić, *OŠ „Bukinje“*, Suada Mehić, *OŠ „Gnojnica“*, Admira Ahmetović, *OŠ „Slavinovići“*, Emira Ljubunčić, *OŠ „Safvet-beg Bašagić“*, Jasmina Šarić i Sokoljak Saida, *OŠ „Simin Han“*, Amira Korić, *OŠ „Mramor“*, Munira Jahić, *OŠ „Novi Grad“*, Haida Ahmetović, *OŠ „Šerići“*, Aida Džananović, *OŠ „Orahovica“*, Mara Kešina, *OŠ „Solina“*, Fata Husejnović, *OŠ „Čelić“*, Kurtalić Alma, *OŠ „Kreka“,* Amra Mešić i Enesa Devedžić, *Druga osnovna škola Gračanica,* Hajrija Salkanović, Behida Malkić, Nermina Isović i Šemsa Begić , *OŠ „Tušanj“*, Jasmina Hodžić i Edin Mrkanović , *OŠ „Brijesnica“*, Amela Salkić, Suada Bećirović, Fahrudin Bešić , *OŠ „Puračić“*, Amra Bektić, Samir Džananović i Elvir Mujić, *OŠ „Hasan Kikić“ Gračanica*, Elvira Muratović, Enesa Smajlbegović i Bilal Softić, *OŠ „Klokotnica“*, Amra Ćidić i Nedžad Udvinčić, Zehrija Tokić *OŠ „Musa Ćazim Ćatić“ Zelinja*, Ajiša Nakičević i Senad Avdić, *OŠ „Teočak“*, Almir Ljubunčić, Nermina Džanić *OŠ „Rapatnica“*, Mirnes Poljaković, *OŠ „Sapna“*, Nihad Zaketović, *OŠ „Džakule“*, Mirsad Mehmedić, *OŠ „Centar“*, Hasan Smajić, *OŠ „Malešići“*, Damir Krdžić i Salim Kovač, *OŠ „Sladna“*, Edin Gostevčić, *OŠ „Podrinje“ Mihatovići*, Asim Imamović, *OŠ „Kalesija“*, Asim Krnjić, *OŠ „Gnojnica“*, Emir Hozić, *Druga osnovna škola Srebrenik*, Ferid Nukić i Omer Brkić, *OŠ „Poljice“*, Mujo Ramić, Muhamed Šmigalović i Nermin Avdić, *Druga snovna škola Živinice*, Nurkanović Kristina, Selmir Karić i Rasim Dugić, *OŠ „Ivan Goran Kovačić“* Gradačac, Edis Ćatibušić, *OŠ „Čelić“*.

Uvodne riječi

Poštovani učenici i učenice,
uvažene kolege/ce nastavnici i nastavnice,

pred nama je Zbirka zadataka iz matematike za pripremu učenika osnovnih škola za takmičenje. Ideja oko izdavanja ove zbirke se provlači kroz aktivnosti Pedagoškog zavoda TK i Udruženja matematičara TK, partnera Pedagoškog zavoda TK u organizaciji i izvođenju takmičenja učenika osnovnih i srednjih škola iz matematike.

Poznato je da postojeće zbirke zadataka i udžbenici ne odgovaraju, u potpunosti, potrebama učenika za kvalitetnije pripremanje za takmičenje, naročito na nižim nivoima.

Sa druge strane, na tržištu postoje publikacije i zbirke, uglavnom, već viđenih zadataka na zvaničnim takmičenjima, kako na našem Kantonu, tako i u zemljama u okruženju, koji ne obezbjeđuju fond zadataka sa postepenim uvođenjem matematičkih vještina, od prostog ka složenom.

Zato je zaključeno, da nedostaje materijal za pripremu takmičenja, kako rekosmo, na nižim nivoima, npr. školskim, općinskim, a djelimično i kantonalnim, koji bi trebao sadržavati zadatke umjerene složenosti, čije rješavanje bi efikasnije premostilo jaz između redovne i dodatne nastave matematike i jednog ozbiljnijeg pristupa pripremanja za takmičenje.

Ideja je potekla u Udruženju matematičara TK, jer se iz iskustva znalo da su učenici bili nezadovoljni sa konceptom zadavanja takmičarskih zadataka, koji su ponekad većinu njih znali iznenaditi svojom složenošću. Preovladalo je mišljenje da u ovom procesu trebaju učestvovati svi nastavnici matematike, jer oni rade direktno sa svojim učenicima na pripremi za takmičenje. Svaki od njih je poslao zadatke, koji su primjereni njihovim učenicima, sa rješenjima i uputama za rješavanje zadataka.

U nekim školama, na prijedlozima zadataka, su radili i učenici, već poznati takmičari. Koristimo priliku da im se zahvalimo na njihovom trudu.

Zadaci su svrstani po razredima i oblastima sa rješenjima ili kratkim uputama. U prilog ove zbirke smo postavili i sve formule i matematičke simbole iz gradiva matematike za osnovne škole, da se učenicima nađu na dohvat ruke u eventualnoj, praktičnoj primjeni.

Koristimo priliku da se zahvalimo svim nastavnicima i učenicima, koji su učestvovali u izradi prijedloga zadataka, koji sadrže mnoštvo matematičkih ideja. Nadamo se da će ovaj materijal dobro doći učenicima i nastavnicima u kvalitetnijoj pripremi za takmičenje učenika osnovnih škola iz matematike.

Molimo sve korisnike ove zbirke da svojim sugestijama i ispravkama eventualnih grešaka, poboljšaju kvalitet ove Zbirke zadataka.

Iz Pedagoškog zavoda TK

Sadržaj

Zadaci za šesti razred

Skupovi

Uglovi

Skup prirodnih brojeva

Djeljivost u skupu prirodnih brojeva

Razlomci

Svaki djelilac proizvoljnog broja n, *različit od samog broja* n, *nazivamo pravi djelilac broja* n. *Pravi djelioci broja* 6 *su brojevi* $1, 2$ *i* 3. *Njihov zbir je* $1+2+3=6$. *Dakle, broj* 6 *je jednak zbiru svojih pravih djelilaca. To svojstvo ima i broj* 28*, čiji su pravi djelioci brojevi* $1, 2, 4, 7$ *i* 14, *pa je* $1+2+4+7+14=28$.

Brojevi sa ovakvom osobinom nazivamo ***savršenim brojevima***. *Slijedeći savršeni brojevi su* 496 *i* 8128. *Savršeni broj* 8128 *bio je poznat Nikomahu*[1]. *Fibonači*[2] *je za određivanje savršenih brojeva koristio izraz*

$$\frac{1}{2}\cdot 2^p(2^p-1)$$

gdje je p *prost broj. Za* $p \in \{2, 3, 5, 7\}$, *a koristeći prethodnu formulu dobijamo slijedeće savršene brojeve:* $6, 28, 469, 8128$. *Peti savršeni broj* 33550336 *pronašao je Regiomontanus*[3]. *Šesti savršeni broj je* 8589056, *sedmi savršeni broj je* 137438691328, *osmi savršeni broj je* 2305843008139952128, *... Do kraja 2013. godine poznato je 48 savršenih brojeva i svi su parni. Posljednji i najveći savršeni broj pronađen je 2013. godine i zapisuje se pomoću 34850340 cifara.*

[1] Nikomah (starogrčki: Νικόμαχος ὁ Γερασένος; 60. – 120. g. n. e.) bio je starogrčki matematičar i filozof. U svojoj uticajnoj knjizi *„Uvod u aritmetiku"* po prvi put u povijesti grčke matematike aritmetiku je postavio nezavisnom od geometrije.

[2] Leonardo od Pise, poznat kao Leonardo Bonacci ili Leonardo Fibonacci je talijanski matematičar koji je živio u periodu oko 1170. – 1250. godine. Bio je jedan od najtalentiranijih matematičara srednjeg vijeka. Najpoznatiji je po tome što je raširio upotrebu arapskih cifara u Evropi, te po nizu Fibonaccijevih brojeva.

[3] Johannes Müller Regiomontanus je njemački matematičar, astronom, astrolog i prevoditelj. Živio je u periodu 1436. – 1476. godine. Najvažnija su mu djela: *"O bilo kojim trokutima"*, *„Tabele kretanja planeta"*, *„Oblik neba"*.

Skupovi

1. Od 1100 učenika, 470 se bavi skijanjem, 250 plivanjem, a 542 učenika se ne bavi ovim sportovima. Koliko učenika se bavi sa oba sporta?
Rješenje:

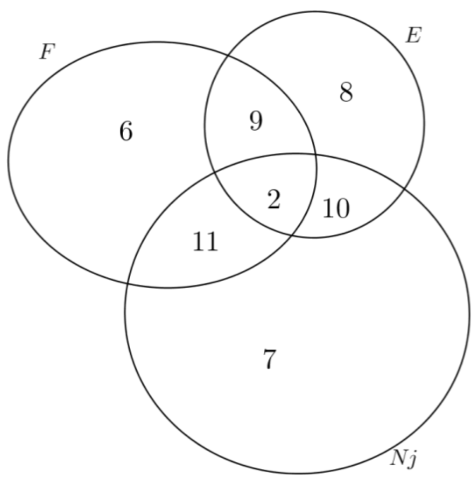
Broj učenika koji se bavi sportom je $1100 - 542 = 558$. A broj učenika koji se bavi sa oba sporta je $(250 + 470) - 558 = 720 - 558 = 162$

2. Skup A ima 22 elementa, skup B 17. Ako skup $A \cup B$ ima 25 elemenata, koliko elemenata ima skup $A \setminus B$ i skup $A \cap B$?
Rješenje:

Skup $A \cap B = (A + B) - (A \cup B) = 22 + 17 - 25 = 14$ elemenata.
Skup $A \setminus B = A - (A \cap B) = 22 - 14 = 8$ elemenata.

3. Koliko je bilo ukupno učesnika na jednom savjetovanju ako svaki od njih govori bar jedan od tri strana jezika i to:
2 učesnika govore francuski, engleski i njemački,
9 učesnika govori samo francuski i engleski,
13 učesnika govori francuski i njemački,
12 učesnika govori njemački i engleski,
29 učesnika govori engleski,
6 učesnika govori samo francuski, 7 učesnika govori samo njemački.
Rješenje:

Zadatak rješavamo pomoću Venovog dijagrama: Ukupno 53 učesnika.

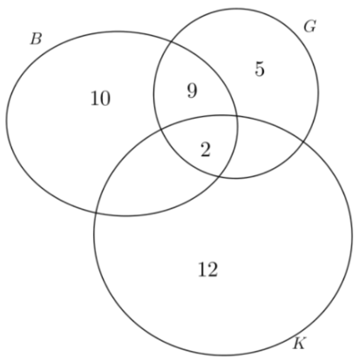


4. Neka je M skup slova koja čine riječ matematika, a T skup slova koja čine riječ takmičenje. Koliko se dvočlanih skupova može načiniti od elemenata skupa $M \cap T$?
Rješenje:

Odredimo elemente skupa $M = \{m, a, t, e, i, k\}$ i elemente skupa $T = \{t, a, k, m, i, č, e, nj\}$. Elementi skupa $M \cap T = \{m, a, t, e, i, k\}$. Svi dvočlani skupovi koji se mogu načiniti od elemenata skupa $M \cap T$ su: $\{m, a\}$, $\{m, t\}$, $\{m, e\}$, $\{m, i\}$, $\{m, k\}$, $\{a, t\}$, $\{a, e\}$, $\{a, i\}$, $\{a, k\}$, , $\{t, e\}$, $\{t, i\}$, $\{t, k\}$, $\{e, i\}$, $\{e, k\}$, $\{i, k\}$.
Ukupno 15 dvočlanih skupova.

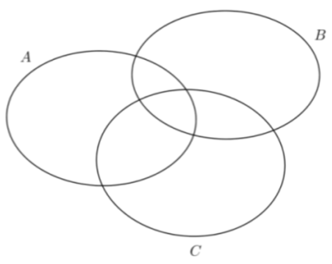
5. Od učenika jednog razreda svaki od njih voli bar jedno od ova tri voća: banana, grožđe, kruške. Njih 21 voli banane, 11 banane i grožđe, 16 grožđe, 2 sve tri vrste voća, a 14 kruške. Koliko učenika ima u razredu i koliko od njih voli tačno dvije vrste voća?
Rješenje:

Prema tekstu zadatka imamo Venov dijagram:

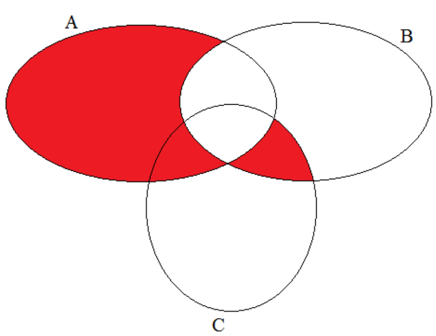


Razred ima 38 učenika, a njih tačno 9 voli dvije vrste voća.

6. Osjenči dio dijagrama koji odgovara skupovnim operacijama $(A \setminus B) \cup (B \cap C)$.



Rješenje:



7. Svi učenici jednog odjeljenja Prve OŠ Srebrenik učestvuju u radu bar jedne od sekcija: odbojkaške, matematičke ili historijske. U sve tri sekcije učlanjena su tri učenika, u samo po dvije sekcije uključena su po četri učenika, a u samo jednu sekciju učlanjeno je po pet učenika. Koliko učenika ima u odjeljenju? Koliko učenika je u odbojkaškoj, koliko u matematičkoj, a koliko u historijskoj sekciji?
Rješenje:

$O = \{x | x\ su\ učenici\ odbojkaške\ sekcije\}$
$M = \{x | x\ su\ učenici\ matematičke\ sekcije\}$
$H = \{x | x\ su\ učenici\ historijske\ sekcije\}$
$n(O \cap M \cap H) = 3$
$n(O \cap M) = 4$
$n(O \cap H) = 4$
$n(M \cap H) = 4$
$n\big(O \setminus (M \cup H)\big) = 5$
$n\big(M \setminus (O \cup H)\big) = 5$
$n\big(H \setminus (M \cup O)\big) = 5$
$n(O \cup M \cup H) =?$
$n(M) =?$
$n(O) =?$
$n(H) =?$
$n(H) = 5 + 4 + 4 + 3 = 16$
$n(M) = 5 + 4 + 4 + 3 = 16$
$n(O) = 5 + 4 + 4 + 3 = 16$
$n(OUMUH) = 3 + 4 + 4 + 4 + 5 + 5 + 5 = 30$

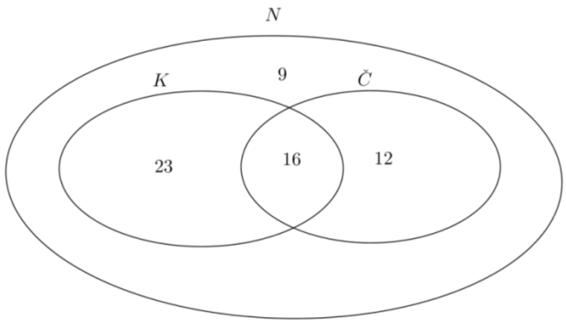
U razredu je ukupno 30 učenika, a u svaku od sekcija uključeno je po 16 učenika.

8. Dati su skupovi: $\mathrm{A} = \{x \in \mathbb{N} | 250 \leq x < 300$ i x djeljiv sa $6\}$ i $B = \{y \in \mathbb{N} | 250 \leq y \leq 300$ i y djeljiv sa $9\}$. Odredi najveću moguću razliku dva broja iz skupa $A \cap B$.
Rješenje:

$A = \{252, 258, 264, 270, 276, 282, 288, 292\}, B = \{252, 261, 270, 279, 288, 297\}$
$A \cap B = \{252, 270, 288\}$.
Najveća moguća razlika se dobije oduzimanjem od najvećeg najmanji element skupa $A \cap B$, a to je $288 - 252 = 36$.

9. U školi ima 60 nastavnika. Od tog broja njih 39 pije kafu, 28 pije čaj, 16 pije i čaj i kafu. Ima li nastavnika koji ne pije ni čaj ni kafu ?

Rješenje:

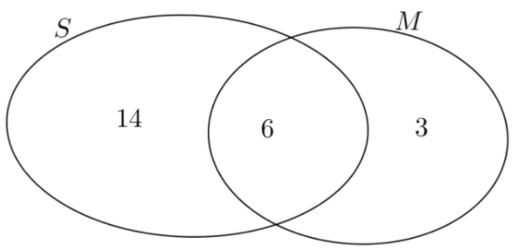


N −skup svih nastavnika
K −skup nastavnika koji piju kafu
Č −skup nastavnika koji piju čaj

Nastavnici koji piju samo kafu: $39 - 16 = 23$
Nastavnici koji piju samo čaj: $28 - 16 = 12$
Nastavnici koji ne piju ni čaj ni kafu: $60 - (23 + 16 + 12) = 60 - 51 = 9$
Dakle, 9 nastavnika ne pije ni čaj ni kafu.

10. U nekoj grupi učenika njih 20 vole sport, 9 muziku, a 6 muziku i sport. Odredi koliko ima učenika u toj grupi, koliko onih koji vole samo sport , a koliko onih koji vole samo muziku? (Koristi Venov dijagram!)

Rješenje:



Ukupan broj učenika je 23. Samo sport voli 14 učenika, a samo muziku 3 učenika.

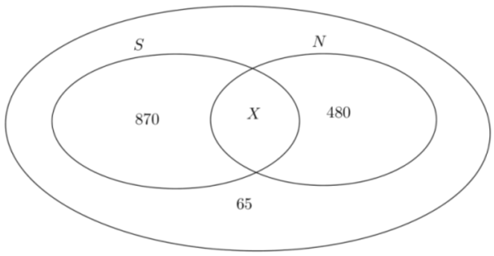
11. Odredi skup X tako da važi: a) $\{1, 2\} \cap X = \{1, 2, 3\}$;
b) $\{1, 2\} \cup X = \{1, 2, 3\}$;
c) $\{1, 2, 3\} \cap X = \{1, 2\}$.

Rješenje:

a) Takav skup ne postoji.
b) Postoje četiri rješenja: $X = \{3\}$, $X = \{1, 3\}$, $X = \{1, 2, 3\}$.
c) X je bilo koji skup koji sadrži 1 i 2 i ne sadrži 3.

12. Od 1050 učenika 870 se bavi skijanjem, 480 nogometom, a 65 učenika ne bavi se ovim sportovima. Koliko se učenika bavi skijanjem i nogometom?
Rješenje:

Broj učenika koji se bavi bar jednim od ova dva sporta je $1050 - 65 = 985$. Skup S (skijanje) ima 870 učenika. Skup N (nogomet) ima 480 učenika.



Označimo sa X broj učenika koji se bave sa oba sporta
$X = (870 + 480) - 985$
$X = 365$

13. Dati su skupovi $A = \{1,2,3\}$ i $B = \{3,4,5\}$. Odredi skup X ako je $A \cup X = A$ i $B \cap X = A \backslash (A \backslash B)$. Koliko rješenja ima zadatak?
Rješenje:

Zadatak ima tri rješenja: $X = \{3\}$, $X = \{2,3\}$, $X = \{1,2,3\}$.

14. U jednoj školi ima 450 učenika. Sportom se ne bavi samo njih 20. Ostali igraju košarku, odbojku ili fudbal. Košarku i odbojku igra 215 učenika, fudbal i odbojku igra 323 učenika. Koliko učenika se bavi svakim od ovih sportova?
Rješenje:

Fudbal: 215, Odbojka 108, Košarka 107

15. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 1000, koji nisu djeljivi ni sa 4 ni sa 6?
Rješenje:

Napišimo elemente skupova:
$A = \{1, 2, 3, \ldots, 998, 999\}$, skup koji sadrži brojeve manje od 1000
$B = \{4, 8, 12, \ldots, 992, 996\}$, skup koji sadrži brojevedjeljive sa 4
$C = \{6, 12, 18, \ldots, 990, 996\}$, skup koji sadrži brojeve djeljive sa 6
$B \cap C = \{12, 24, 36, \ldots, 984, 996\}$, skup koji sadrži brojeve djeljive sa 4 i sa 6
Kako je svaki četvrti broj djeljiv sa 4, svaki šesti djeljiv sa 6 i svaki dvanaesti broj djeljiv sa 12 imamo:
$999 : 4 = 249$ (3), ostatak dijeljenja Znači: $n(A) = 999$
$999 : 6 = 166$ (3), ostatak dijeljenja $n(B) = 249$

$999 : 12 = 83$ (3), ostatak dijeljenja

$n(C) = 166$
$n(B \cap C) = 83$

$249 - 83 = 166$
$166 - 83 = 83$
Traženi brojevi koji nisu djeljivi ni sa 4 ni sa 6 sadrži skup $A \backslash (BUC)$ i ima ih
$999 - (166 + 83 + 83) = 999 - 332 = 667.$

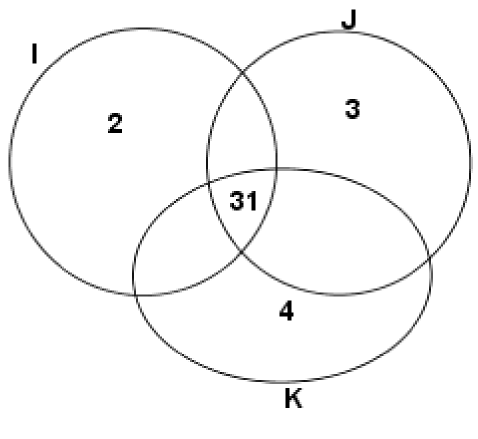
16. U jednoj školi 320 učenika ide na informatičku sekciju, a 124 na matematičku. 256 učenika ne ide ni na jednu od navedenih sekcija. Ako je u toj školi 600 učenika, koliko učenika ide samo na matematičku i samo na informatičku sekciju?
Rješenje:

$$\left.\begin{matrix} 600 - 256 = 344 \\ 320 + 124 = 444 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 444 - 344 = 100$$
$324 - 100 = 224$
$124 - 100 = 24$
Na informatičku sekciju ide 224, a na matematičku sekciju 24 učenika.

17. Na kontrolnom zadatku iz matematike dat je jedan izraz, jedna jednačina i jedna konstrukcija, a kontrolni je radilo 40 učenika. Samo izraz su riješila 2 učenika, samo jednačinu 3 učenika, a samo konstrukciju 4 učenika. Nisu riješili samo izraz 7, samo jednačinu 5, samo konstrukciju 6 učenika. Ostali su uradili sve zadatke. Koliko je takvih učenika bilo?

Rješenje:

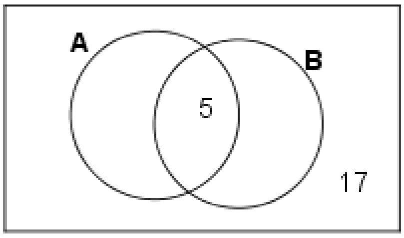
Takvih učenika je 31.(Pogledaj sliku!)



18. Skupovi A i B imaju jednak broj elemenata. Za skupove A i B vrijedi:
$A \cup B = \{x : x \in \mathbb{N}\ i\ x < 18\}\ \ i\ \ A \cap B = \{1,2,7,13,17\}$.
Odrediti skupove A i B, ako se zna da je svaki elemenat skupa $A \backslash B$ veći od svakog elementa skupa $B \backslash A$.

Rješenje:

Vidimo da je $A \cup B = \{1,2,\dots,16,17\}\ \ i\ \ A \cap B = \{1,2,7,13,17\}$.
Skupovi A i B imaju jednak broj elemenata. Iz činjenice da je svaki elemenat skupa $A \backslash B$ veći od svakog elementa skupa $B \backslash A$ i da skupovi A i B imaju isti broj elemenata, slijedi da skupovi $A \backslash B\ i\ B \backslash A$ imaju po $(17-5):2 = 6$ elemenata.



To znači da je $A \backslash B = \{16,15,14,12,11,10\}\ \ i\ \ B \backslash A = \{3,4,5,6,8,9\}$.
Tada je $A = \{17,16,15,14,13,12,11,10,7,2,1\}\ \ i\ \ B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,13,17\}$.

19. Zadata duž AE podijeljena je trima tačkama na 4 nejednaka dijela. Rastojanje središta unutrašnjih dijelova je 8 cm, a rastojanje središta krajnjih dijelova je 24 cm. Kolika je dužina zadate duži?

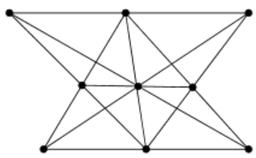
Rješenje:

Kako je NP = 8 cm to je BD = 16 cm i MQ = 24 cm. (Vidi sliku!)

MB + DQ = 24 - 16 = 8 cm. Tako je AB + DE = 16 cm i konačno,
AE = 16 + 16 = 32 cm.

20. Amra je zasadila 9 strukova paradajza u 10 redova, i to tako da u svakom redu budu po 3 struka. Kako je ona to učinila?

Rješenje: Rješenje je dato na slici:



21. Dato je u ravni 10 crvenih i 8 plavih tačaka. Koliko ima trouglova, čija tjemena predstavljaju date tačke, ako svaki od trouglova ima i plavih i crvenih tjemena?

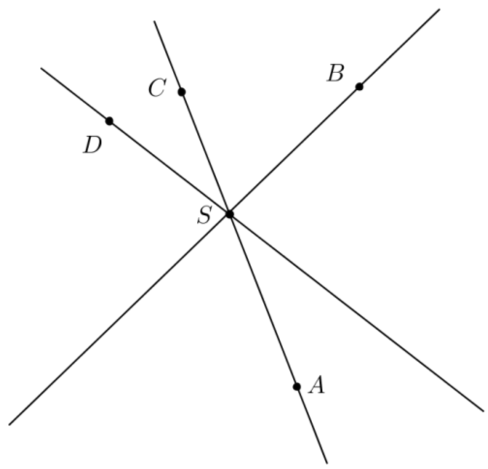
Rješenje:

Zamislimo da su crvene tačke na jednoj pravoj, recimo pravoj p, a plave na drugoj pravoj, recimo pravoj q. Svaka od deset crvenih tačaka određuje sa ostalim crvenim tačkama 9 duži što čini ukupno $9 \cdot 10 = 90$ duži.
Kako smo na ovaj način svaku duž računali dva puta, to je stvarni broj duži $90: 2 = 45$.
Slično, 8 plavih tačaka na pravoj q određuju $(8 \cdot 7): 2 = 28$ duži. Svaka duž na pravoj p, sa jednom tačkom na pravoj q određuje jedan trougao i obrnuto, duž sa prave q i tačka sa prave p određuju trougao. Ukupno ovih trouglova ima

$$45 \cdot 8 + 28 \cdot 10 = 360 + 280 = 640.$$

Uglovi

1. Zadane su prave AS, BS i DS (kao na slici). Tačka C nalazi se na pravcu AS. Ako je $\sphericalangle ASB = 136°, \sphericalangle BSD = 105°$ kolika je veličina ugla $\sphericalangle CSD$?



Rješenje:

Na pravoj BS odrediti tačku E, a na pravoj DS tačku F, pa je $\sphericalangle DSE = 180° - 105° = 75°$, $\sphericalangle FSB = \sphericalangle DSE = 75°$, $\sphericalangle FSA = 136° - 75° = 61° = \sphericalangle CSD$

2. Zbir komplementnog i suplementnog ugla α iznosi $150°$. Koliko iznosi ugao α?
Rješenje:

Prema tekstu zadatka imamo jednačinu: $(90^\circ - \alpha) + (180^\circ - \alpha) = 150^\circ \Rightarrow \alpha = 60^\circ$.

3. Koliki je ugao α ako je zbir njegovog komplementnog i suplementnog ugla 10α?
Rješenje:
Prema tekstu zadatka formirajmo jednačinu, čije je rješenje
$(90^\circ - \alpha) + (180^\circ - \alpha) = 10\alpha \Rightarrow \alpha = 22^\circ 30'$

4. Razlika dva suplementna ugla α i β jednaka je uglu β. Izračunati uglove α i β.
Rješenje:

$\alpha + \beta = 180°, \alpha - \beta = \beta \Rightarrow \alpha = 2\beta$ pa je $\beta + 2\beta = 180°$ iz čega slijedi $\beta = 60°$ i $\alpha = 120°$

5. Zbir ugla koji je komplementan uglu α i ugla koji je suplementan uglu α tri puta je veći od ugla α. Odredi ugao α.
Rješenje:

$\alpha + \beta = 90°$, $\alpha + \gamma = 180°$, $\beta + \gamma = 2\alpha$, $90° - \alpha + 180° - \alpha = 2\alpha$, $5\alpha = 270°$, $\alpha = 54°$

6. Uglovi α i β su komplementni. Uglovi koji su suplementni sa α i β razlikuju se za $13°\,30'$. Odredi uglove α i β.
Rješenje:

$\alpha + \beta = 90°$, $\alpha + \gamma = 180°$, $\beta + \delta = 180°$, $\gamma - \delta = 13°\,30'$, $\gamma = \delta + 13°\,30'$
$\alpha + \delta = 166°\,30'$,
$\alpha = 166°\,30' - \delta$
$\beta = 180° - \delta$
$166°\,30' - \delta + 180° - \delta = 90°$
$2\delta = 256°\,30'$
$\delta = 128°\,15'$
$\alpha = 38°\,15'$
$\beta = 51°\,45'$

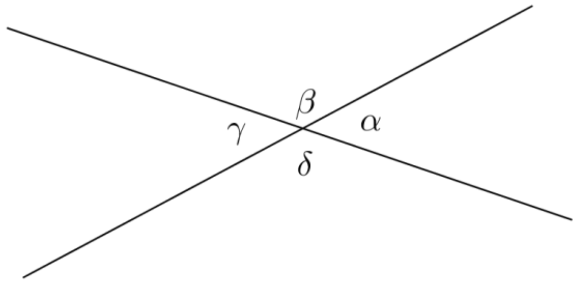
7. Uglovi α i β su suplementni a uglovi β i γ komplementni. Odrediti uglove α, β i γ ako je ugao α pet puta veći od ugla γ.
Rješenje:

$\alpha + \beta = 180°$, $\beta + \gamma = 90°$, $\alpha = 5\gamma$. Iz datih jednakosti dobijemo $\beta = 90° - \gamma$, dakle
$5\gamma + 90° - \gamma = 180° \Rightarrow \gamma = 22°\,30'$
$\alpha = 112°\,30'$
$\beta = 67°\,30'$

8. Od dva ugla čiji je zbir $114°$ jedan je komplementan a drugi suplementan uglu α. Izračunati ugao α.
Rješenje:

Ugao koji je komplementan α $^{\alpha}$ je $90° - \alpha$, a ugao koji je suplementan α označavamo sa $180° - \alpha$. Zbir ta dva ugla je $114°$. Imamo jednačinu čije je rješenje
$90° - \alpha + 180° - \alpha = 114° \implies \alpha = 78°$

9. Dvije prave se sijeku i obrazuju četiri ugla. Odrediti te uglove ako je jedan od njih 11 puta manji od zbira ostala tri ugla.
Rješenje:



Uglovi α i γ su unakrsni i međusobno su jednaki, a također uglovi β i δsu unakrsni i međusobno jednaki. Neka je ugao α najmanji. Prema tekstu zadatka možemo formirati jednačinu: $11\alpha = \beta + \gamma + \delta$, tj. $11\alpha = 2\beta + \alpha$. Znamo još da je $\alpha + \beta = 180° \implies \beta = 180° - \alpha$. Uvrštavanjem poslednje jednakosti u jednačinu $11\alpha = 2\beta + \alpha$ imamo: $11\alpha = 2 \cdot (180° - \alpha) + \alpha \implies \alpha = 30°, \beta = 150°, \gamma = 30°, \delta = 150°$

10. Razlika dva komplementna ugla je $1°\,5'$. Kolike su veličine tih uglova?
Rješenje:

Prema tekstu zadatka možemo formirati jednačine: $\left.\begin{aligned} \alpha + \beta &= 90° \\ \alpha - \beta &= 1°\,5' \end{aligned}\right\}$. Iz druge jednadžbe dobijamo da je $\alpha = \beta + 1°\,5'$, odakle uvrštavanjem ove jednakosti u prvu jednadžbu dobijamo: $\beta + 1°\,5' + \beta = 90° \implies \beta = 44°\,27'30''$. Onda ugao α iznosi $\alpha = 45°\,32'30''$.

11. Koliki je ugao α ako je njegov suplementni ugao za $30°$ veći od njegovog dvostrukog komplementnog ugla?

Rješenje:

Prema tekstu zadatka možemo formirati jednadžbu:
$180° - \alpha = 2 \cdot (90° - \alpha) + 30° \implies \alpha = 30°$

12. Ugao α jednak je polovini svog suplementa. Odredi njegov komplement.
Rješenje:

$\alpha = \beta : 2$	$\alpha = \beta : 2 \implies \beta = 2 \cdot \alpha$	$\alpha + \delta = 90°$
$\alpha + \beta = 180°$	$\alpha + \beta = 180°$	$\delta = 90° - 60°$
$\alpha + \delta = 90°$	$\alpha + 2\alpha = 180°$	$\delta = 30°$
$\delta = ?$	$3\alpha = 180°$	
	$\alpha = 60°$	

13. Ako se suplement ugla α poveća za 18° dobije se isto kada se ugao α poveća za $\frac{1}{5}$ svoje vrijednosti. Odredi komplement ugla α.
Rješenje:

$(180^{\circ} - \alpha) + 18^{\circ} = \alpha + \frac{1}{5}\alpha \Rightarrow \alpha = 90^{\circ}$ pa je komplement ugla $\alpha = 40^{\circ}\ 54'\ 33''$

14. Razlika dva suplementna ugla je $1°\ 2'$.
a) Koliki su ti uglovi?
b) Koliki će biti ugao od $1°\ 2'$ ako se posmatra kroz lupu koja daje petostruko povećanje?
Rješenje:

a) $\alpha + \beta = 180^{0}$ $\qquad \alpha = 1°\ 2' + 89°\ 29'$
$\alpha - \beta = 1°\ 2'$ $\qquad \alpha = 90°\ 31'$
$1°\ 2' + \beta + \beta = 180^{0}$
$\beta = 89°\ 29'$

15. Ako su uglovi α i β komplementni, α i γ suplementni i β je šest puta manji od γ.
Izračunati $\alpha + \beta + \gamma$.
Rješenje:

$\alpha + \beta = 90°$ $\qquad \alpha + 6\beta = 180°$ $\qquad \alpha + \beta = 90°$ $\qquad \gamma = 6\beta$
$\alpha + \gamma = 180°$ $\qquad \alpha + \beta + 5\beta = 180°$ $\qquad \alpha + 18° = 90°$ $\qquad \gamma = 6 \cdot 18°$
$\gamma = 6\beta$ $\qquad 90° + 5\beta = 180°$ $\qquad \alpha = 90° - 18°$ $\qquad \gamma = 108°$
$5\beta = 180° - 90°$ $\qquad \alpha = 72°$
$5\beta = 90°$
$\beta = 18°$

Dakle, $\alpha + \beta + \gamma = 72° + 18° + 108° = 198°$

16. Koliki je ugao α ako je zbir njegovog komplementnog i suplementnog ugla 7α?
Rješenje:

Komplement ugla α je $90° - \alpha$ a njegov suplement je $180° - \alpha$. Prema uslovima zadatka je $7\alpha = 90° - \alpha + 180° - \alpha \implies \alpha = 30°$

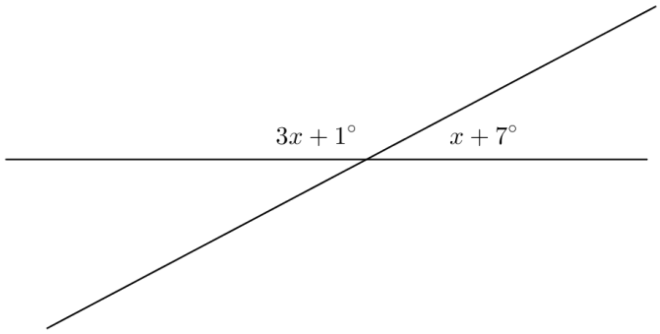
17. Jedan ugao je za $73° \, 30'$ veći od njemu uporednog ugla. Koliki su ti uglovi?
Rješenje:

Dva ugla α i β su uporedni ako je njihov zbir jednak $180°$.
$\alpha + \beta = 180°, \beta = 180° - \alpha$
Iz uslova zadatka vrijedi da je $\alpha = \beta + 73° \, 30' \Rightarrow \alpha = 180° - \alpha + 73° \, 30' \Rightarrow \alpha = 126° \, 45'$
$\Rightarrow \beta = 53° \, 15'$

18. Razlika ugla α i njemu uporednog ugla β je $48°$. Izračunati ugao komplementan uglu β.
Rješenje:

Ako je $\alpha = 180° - \beta$, to je $180° - 2\beta = 48°$. Slijedi da je $\beta = 66°$, pa je njemu komplementan ugao od $24°$.

19. Izračunati mjere uglova na slici



Rješenje:

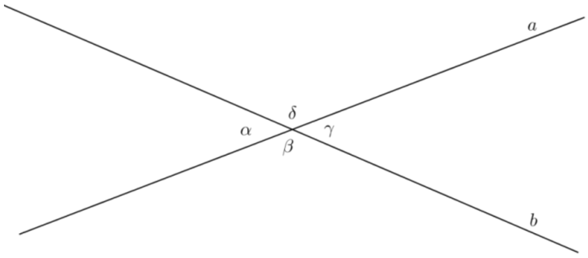
Kako je $(3x + 1°) + (x + 7°) = 180°$, to je $4x = 172°$, odnosno $x = 43°$. Slijedi da su na slici uglovi od $130°$ i $50°$.

20. Uglovi α i β su komplementni. Odredi uglove α i β, ako je njihova razlika jednaka trećini većeg ugla .
Rješenje:
Neka je $\alpha > \beta$. Kako je $\alpha + \beta = 90°$ i $\beta = \frac{2}{3}\alpha$, to je $\alpha = 54°$ i $\beta = 36°$.

21. Razlika mjera dva komplementna ugla je $2007'$. Odredi mjere tih uglova .
Rješenje:

Neka je mjera manjeg ugla α. Kako je $2007' = 33°\ 27'$, slijedi da je mjera većeg ugla $\alpha + 33°\ 27'$. Koristeći uslov komplementnosti dobivamo da je $2\alpha + 33°\ 27' = 90°$, pa je $2\alpha = 56°\ 33'$. Slijedi da je mjera manjeg ugla $28°\ 16'\ 30''$, a mjera većeg ugla $61°\ 43'\ 30''$.

22. Dvije prave se sijeku i obrazuju četiri ugla. Zbir dva oštra ugla veći je za $20°$ od jednog tupog ugla. Koliki su ti uglovi?
Rješenje:



$\alpha + \beta = 180°$
$\alpha + \alpha = \beta + 20° \implies \beta = 2\alpha - 20°$
- iz gornje dvije jednakosti imamo:
$\alpha + 2\alpha - 20° = 180° \implies \alpha = 66°\ 40'$
$\left.\begin{array}{l}\alpha = 66°\ 40'\\ \beta = 2\alpha - 20°\end{array}\right\} \implies \beta = 2 \cdot 66°\ 40' - 20°$
$\beta = 113°\ 20'$

23. Uglovi α i β su suplementni. Da su oba manja za po $24°$, tada bi jedan ugao bio četiri puta veći od drugog ugla. Koliko iznose uglovi α i β?
Rješenje:

Neka je $\alpha > \beta$
$\alpha + \beta = 180°$
$\alpha - 24° = 4 \cdot (\beta - 24°)$
$\alpha = 4\beta - 72°$
$\alpha + \beta = 180°$
$4\beta - 72° + \beta = 180°$
$5\beta = 252°$
$\beta = 252° : 5 = 50°\ 24'$
$\alpha = 180° - 50°\ 24'$
$\alpha = 129°\ 36'$

24. Uglovi α i β su suplementni, a uglovi β i γ komplementni. Odredi uglove α, β i γ ako je ugao α pet puta veći od ugla γ.
Rješenje:

$\alpha + \beta = 180^{\circ}, \beta + \gamma = 90^{\circ}, \alpha = 5\gamma$
Iz jednakosti $\beta + \gamma = 90^{\circ}$ dobijemo da je $\beta = 90° - \gamma$, dakle
$5\gamma + 90° - \gamma = 180° \implies \gamma = 22°\ 30' \wedge \alpha = 112°\ 30' \wedge \beta = 67°\ 30'$

25. Zbir četiri ugla $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ je puni ugao. Ako se oni razlikuju redom po $10°$ odrediti njihovu vrijednost.
Rješenje:

$\alpha + \alpha + 10 + \alpha + 20 + \alpha + 30 = 360° \Longrightarrow 4\alpha = 300° \Longrightarrow \alpha = 75°$ tj. prvi ugao, drugi 85°, treći 95° i četvrti ugao 105°.

26. Uglovi α i β su suplementni, a uglovi β i γ su komplementni. Izračunaj uglove α, β i γ ako je zbir uglova α i γ jednak $124°$.
Rješenje:

$\alpha = 107°, \beta = 73°, \gamma = 17°$

27. Uglovi α i β su suplementni. Pet šestina ugla α i trećina ugla β su komplementni. Odredi uglove α i β.
Rješenje:

$\alpha = 60°, \beta = 120°$

28. Dat je ugao $\alpha = 160°$ i podijeljen je na četiri dijela tako da je prvi dva puta veći od drugog, drugi četiri puta veći od četvrtog, a treći tri puta veći od četvrtog. Izračunati koliko iznosi svaki od tih dijelova.
Rješenje:

80°, 40°, 30°, 10°

29. Ugao α je za $1997'$ manji od svog komplementnog ugla. Za koliko je ugao α manji od svog suplementnog ugla?
Rješenje:

$123°\ 17'$

30. Mjera ugla $\alpha + \beta$ je za $38°\ 41'\ 24''$ veća od mjere ugla $\alpha - \beta$. Odredi mjeru ugla β.
Rješenje:

$\beta = 19°\ 20'\ 42''$

31. Zbir ugla α i njemu uporednih uglova je $325°$. Odredi ugao α i njemu uporedan ugao.
Rješenje:

$\beta = 145°$

32. Dvije prave se sijeku i obrazuju dva para unakrsnih uglova. Zbir dva oštra ugla manji je od jednog tupog ugla za 18°. Odredi te uglove.
Rješenje:

$\alpha = 54°, \beta = 126°$

33. Dvije prave se sijeku i obrazuju četiri ugla. Zbir dva oštra ugla je veći za $20°$ od jednog tupog. Koliki su ti uglovi?
Rješenje:

$\alpha = 66°\ 40', \beta = 113°\ 20'$

34. Dvije prave se sijeku u tački A i obrazuju četiri ugla. Zbir unakrsnih oštrih uglova jednak je polovini jednog od unakrsnih tupih uglova. Odredi mjerne brojeve svakog od tih uglova.
Rješenje:

$\alpha = 36°, \beta = 144°$

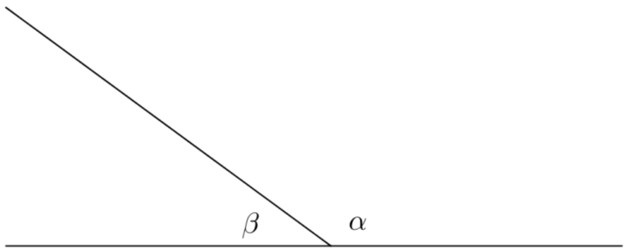
35. Ako se saberu polovina, četvrtina i osmina ugla α onda se dobije ugao suplementaran uglu α. Koliki je ugao koji je komplementaran sa uglom suplementarnim uglu α?
Rješenje:

$\beta_1 = 6°$

36. Dvije prave se sijeku zbir tri od nastala cetiri ugla je $213°\ 20'$. Koliki je svaki od nastalih uglova?
Rješenje:

$\alpha = 360° - 213°\ 20'$
$\alpha = 146°\ 40'$
$2\alpha + 2\beta = 360°$
$2\beta = 360° - 293°\ 20'$
$2\beta = 66°\ 40'$
$\beta = 33°\ 20'$

37. Razlika ugla α i njemu uporednog ugla β je 76°. Izračunaj ugao γ koji je komplementan uglu β.
Rješenje:



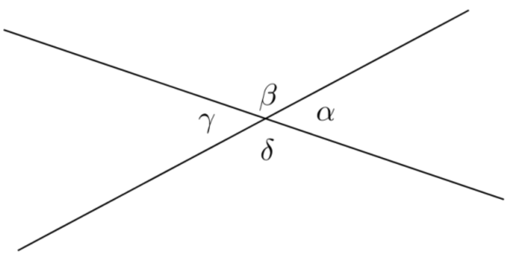
Uglovi: α i β - uporedni uglovi
β i γ - komplementni uglovi
$\alpha + \beta = 180°$
$\alpha - \beta = 76° + \beta \implies \alpha = 76° + \beta$

Pa imamo:
$76° + \beta + \beta = 180°$
$76° + 2\beta = 180° \implies \beta = 52°$

$\beta + \gamma = 90°$
$52° + \gamma = 90°$
$\gamma = 90° - 52°$
$\gamma = 38°$ Traženi ugao je $\gamma = 38°$.

38. Dvije prave se sijeku i obrazuju četiri ugla (kuta). Odredi te uglove ako je jedan od njih 9 puta manji od zbira ostala tri.
Rješenje:

I način



$\beta + \gamma + \delta = 9\alpha$
$\alpha + (\beta + \gamma + \delta) = 360°$
$\alpha + 9\alpha = 360°$
$10\alpha = 360°$
$\alpha = 360° : 10$
$\alpha = 36°$

$\alpha + \beta = 180°$
$36° + \alpha = 180°$
$\beta = 180° - 36°$
$\beta = 144°$

Kako je $\gamma = \alpha$ to i $\gamma = 36°$. Kako je $\delta = \beta$ to je $\delta = 144°$.

Traženi uglovi su: $36°$, $144°$, $36°$ i $144°$.

II način

Iz uslova zadatka proizilazi da sva četiri ugla iznose 10 jednakih dijelova punog ugla tako da imamo $360° : 10 = 36°$. Znači ugao koji je devet puta manji od zbira ostala tri ugla iznosi $36°$. Prema crtežu neka je to ugao $\alpha = 36°$. Kako je $\alpha = \gamma$ (unakrsni uglovi), to je, $\gamma = 36°$.
$360° - 2 \cdot 36° = 360° - 72° = 288°$
Zbir druga dva unakrsna ugla iznosi $288° : 2 = 144°$. Znači $\beta = \delta = 144°$.
Traženi uglovi su: $36°$, $144°$, $36°$ i $144°$.

39. Dva ugla su suplementna . Jedan je 3 puta veći od drugog. Odredi te uglove i napiši vrstu dobivenih uglova.
Rješenje:

$\alpha + \beta = 180°$
$4\alpha = 180°$ $\alpha = 45°$ $\beta = 135°$, uglovi su oštri i tupi respektivno.

40. Koliki je ugao α ako je zbir njegovog komplementnog i suplementnog ugla 4α?
Rješenje:

Komplement: $90° - \alpha$
Suplement: $180° - \alpha$
$(90° - \alpha) + (180° - \alpha) = 4\alpha \implies \alpha = 45°$

Skup prirodnih brojeva

1. Ako od zbira najvećeg četverocifrenog broja sa različitim ciframa i najmanjeg petocifrenog broja sa različitim ciframa oduzmeš neki broj dobićeš 20000. Koji je to broj?
Rješenje:

Najveći četverocifreni broj sa različitim ciframa je 9876, a najmanji petocifreni broj sa različitim ciframa je 10234 pa imamo jednadžbu
$9876 + 10234 - x = 20000$
$20110 - x = 20000$
$x = 20110 - 20000$
$x = 110$

2. Izračunaj $(1700 + 1701 + \cdots + 1799 + 1800): 175 =$
Rješenje:

$1700 + 1800 = 3500, \quad 1701 + 1799 = 3500, \ldots.$
$1700 + 1701 + \cdots + 1799 + 1800 = 3500 \cdot 101: 2 = 353500 : 2 = 176750$
$(1700 + 1701 + \cdots + 1799 + 1800) : 175 = 176750 : 175 = 1010$

3. Koliko ima četverocifrenih brojeva kojima je proizvod cifara 4? Ispiši ih.
Rješenje:

Cifre biramo iz skupova $\{4,1\}$ i $\{2, 1\}$ pa imamo:
$4111, 1411, 1141, 1114, 2211, 2121, 2112, 1122, 1212, 1221$, tj. ukupno 10 brojeva.

4. Za numeraciju stranica jedne knjige upotrijebljeno je 300 cifara. Koliko stranica ima ta knjiga?
Rješenje:

Za numerisanje prvih 9 stranica upotrijebljeno je 9 cifara, a za sledećih 90 upotrebljeno je $90 \cdot 2 = 180$ cifara. Ostatak cifara $300 - 180 - 9 = 111$ upotrijebljeno je za numerisanje trocifrenih stranica kojih ima $111: 3 = 37$. Sada, knjiga ima $9 + 90 + 37 = 136$ stranica.

5. U 5 kutija nalazi se 100 jabuka. U prvoj i drugoj kutiji ima 52 jabuke, u drugoj i trećoj 43 jabuke, u trećoj i četvrtoj 34 i u četvrtoj i petoj 30 jabuka. Koliko jabuka ima u svakoj od tih kutija?
Rješenje:

Označimo redom kutije sa I, II, III, IV i V. Tada imamo po tekstu zadatka podatke:
$I + II + III + IV + V = 100$
$I + II = 52$
$II + III = 43$
$III + IV = 34$
$IV + V = 30$
Zamjenom druge i četvrte jednadžbe u prvu dobijamo: $53 + 34 + V = 100 \;\Rightarrow V = 14$.
Što znači da u petoj kutiji ima 14 jabuka, u četvrtoj će biti onda 16, u trećoj 18, u drugoj 25 i u prvoj 27.

6. Količnik dva boja x i y je 10, a ostatak 40. Naći te brojeve ako je njihov zbir 1679.
Rješenje:

Imamo da je $\left.\begin{array}{r} 10x + y = 1679 \\ x = 10y + 40 \end{array}\right\}$. Zamjenom druge jednadžbe u prvu dobijamo:
$10y + 40 + y = 1679$ odakle je rješenje za jedan od datih brojeva $y = 149$
Tada je $x = 1530$.
Traženi brojevi su 1530 i 149.

7. Postoji li broj čiji je proizvod cifara 462?
Rješenje:

Rastavimo dati broj na faktore $462 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$. Kako je jeadn faktor 11 to je broj, nije cifra pa zaključujemo da takav broj ne postoji.

8. Odrediti cifre a i b u broju $\overline{87a9b}$ tako da on bude djeljiv sa 18.
Rješenje:

Da bi broj bio djeljiv sa 18 treba biti djeljiv i sa 2 i sa 9. Ako je djeljiv sa 2 onda mu zadnja cifra mora biti $0, 2, 4, 6, 8$. Imamo sada slučajeve brojeva: $\overline{87a90}$, $\overline{87a92}$, $\overline{87a94}$, $\overline{87a96}$, $\overline{87a98}$. Da bi dati brojevi bili djeljivi sa 9, zbir cifara im mora biti djeljiv sa 9, pa imamo da su tražena rješenja: 87390, 87192, 87894, 87496, 87298.

9. Dokazati da je zbir prirodnih brojeva od 1 do 1000 djeljiv sa 7.
Rješenje:

Izračunajmo zbir prvih 1000 brojeva:
$$1+2+3+\cdots+998+999+1000=1001\cdot 500=500500$$
pa kada sada dobijeni zbir podijelimo sa 7 dobićemo: $500500:7=71500$. Zaključujemo da je zbir prvih 1000 uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv sa 7.

10. Zbir tri broja, od kojih je svaki slijedeći tri puta veći od prethodnog, iznosi 481. Koji su to brojevi?

Rješenje:

Ako je x najmanji od tih brojeva, srednji po veličini je $3x$, a najveći $3\cdot 3x = 9x$.
Uslove zadatka opisuje jednadžba $x+3x+9x=481 \Rightarrow x=37$.
Pa su traženi brojevi $37, 111$ i 333.

11. Ivana je za rođendan od svojih prijatelja dobila 24 ruže. Ruže su bile bijele, žute i crvene boje. Bijelih je bilo dva puta manje od žutih, a crvenih koliko bijelih i žutih zajedno. Koliko je bilo bijelih, koliko žutih, a koliko crvenih ruža?
Rješenje:

Bijele ruže x, žute ruže $2x$, crvene ruže $x + 2x$
Imamo jednadžbu $x + 2x + x + 2x = 24$, rješavanjem jednadžbe dobijemo
$6x=24, x=4$. Prema tome, bijelih je ruža bilo 4, žutih $2\cdot 4=8$, a crvenih
$4 + 8 = 12$. Dakle, bijelih je 4, žutih dva puta više, dakle 8 i crvenih koliko bijelih i žutih zajedno, znači 12.

12. Sok u flaši košta 40 KM. Sok je 7 puta skuplji od flaše. Koliko košta flaša, a koliko sok?
Rješenje:

Flaša x, sok $7x$
Imamo jednadžbu $x + 7x = 40 \Rightarrow x=5$
Prema tome, flaša košta $5KM$, a sok $7\cdot 5=35KM$

13. Zbir tri uzastopna parna prirodna broja je 216. Koji su to brojevi?
Rješenje:

Ako je n najmanji traženi broj, sljedeća dva parna broja su $n+2, n+4$. Njihov zbroj je 216, pa dobijemo jednadžbu $n+(n+2)+(n+4) = 216$. Njeno rješenje je $n=70$, što znači da su traženi brojevi 70, 72 i 74.

14. Razlika dva broja je 327, a količnik 4. Koji su to brojevi?
Rješenje:

Ako je količnik dva broja 4, znači da je jedan broj 4 puta veći od drugoga, pa ih možemo označiti sa n i $4n$. Iz činjenice da je njihova razlika 327 dobijemo jednačinu $4n - n = 327$. Njeno rješenje je $n = 109$, pa su traženi brojevi 109 i 436.

15. U jednom kokošinjcu ima 3 puta više kokoški nego pijetlova, a pijetlova je za 16 manje nego kokoški. Koliko ima kokoški, a koliko pijetlova u tom kokošinjcu?
Rješenje:

Ako sa n označimo broj pijetlova, onda je $3n$ broj kokoški i vrijedi $3n - n = 16$, otkud dobijemo $n = 8$. Dakle, ima 8 pijetlova i 24 kokoške.

16. Brat je 4 puta stariji od sestre, a sestra je 9 godina mlađa od brata. Koliko godina ima sestra, a koliko brat?
Rješenje:

Ako sestra ima n, brat ima $4n$ godina i vrijedi $4n - n = 9$, otkud slijedi $n = 3$. Sestra ima 3, a brat 12 godina.

17. Zbir tri broja je 147. Prvi od njih veći je 15 puta od drugoga, a treći je za 28 veći od drugoga. Odredi te brojeve.
Rješenje:

x drugi broj, $15x$ prvi broj i $x + 28$ treći broj

$15x + x + x + 28 = 147$
$17x = 147 - 28$
$17x = 119$
$x = 7$ je drugi broj, prvi broj je $15x = 105$ i treći broj je $x + 28 = 35$.

18. Ana je rekla Mariji: „Zamislila sam neki broj. Ako tom broju dodam 13 i dobijeni rezultat podijelim sa razlikom broja 60 i proizvoda broja 8 i zamišljenog broja, dobit ću broj 5.“ Možeš li pomoći Mariji da odgonetne koji je broj Ana zamislila ?
Rješenje:

Ako sa n označimo zamišljeni broj, dobijemo jednadžbu $(n + 13) : (60 - 8 \cdot n) = 5$, otkud slijedi $n + 13 = 5 \cdot (60 - 8n)$. Rješenje te jednadžbe je $n = 7$. Ana je zamislila broj 7.

19. Kutija sa 20 jednakih kuglica ima masu $400g$. Ako u kutiju dodamo još 5 kuglica ukupna masa će biti $470g$. Kolika je masa kutije?

Rješenje:

Možemo zaključiti da 5 kuglica teži $70g$. Onda jedna kuglica teži $70:5 = 14g$. Sada, 20 kuglica ima težinu $20 \cdot 14 = 280g$. Dakle, kutija sama teži: $400 - 280 = 120g$.

20. U ZOO vrtu smješteni su zečevi, ptice i zmije. Djeca su prebrojala 24 glave, 14 krila i 62 noge. Koliko ima kojih životinja?

Rješenje:

Prema broju glava zaključujemo da ima 24 životinje. Kako krila ima 14 zaključujemo da je ptica 7. Sada zečeva i zmija ima 17. Broj nogu kod ptica je također 14, pa $62 - 14 = 48$ je broj nogu kod zečeva. Kako zec ima 4 noge, to je njihov broj 12. Ostane još da zaključimo da zmija ima $17 - 12 = 5$. Dakle, zmija ima 5, zečeva 12 i ptica 7.

21. Izračunati zbir prvih 2016 prirodnih brojeva.

Rješenje:

Zbir možemo pisati :

$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 2013 + 2014 + 2015 + 2016 =$

$= (1 + 2016) + (2 + 2015) + \cdots + (1013 + 1014) = 1008 \cdot 2017 = 2043221$

22. Zbir pet uzastopnih prirodnih brojeva je 1375. Izračunati te brojeve.

Rješenje:

Prirodni brojevi imaju osobinu da je svaki sljedeći od svog prethodnika za 1 veći. Ako uzmemo da je prvi broj u nizu x, onda su sljedeći $x + 1, x + 2, x + 3$ i $x + 4$. Formirajmo jednadžbu. Imamo: $x + x + 1 + x + 2 + x + 3 + x + 4 = 1375 \implies x = 273$

Traženi brojevi su $273, 274, 275, 276$ i 277.

23. Razlika dva broja je 83. Ako veći broj uvećamo 4 puta, a manji ostane nepromijenjen nova razlika je 674. Koji su to brojevi?

Rješenje:

Ako manji broj označimo sa x, onda je veći broj $x + 83$. Pa sada formirajmo jednadžbu po tekstu zadatka: $4 \cdot (x + 83) - x = 674 \implies x = 114$, a veći broj je $114 + 83 = 197$.

Traženi brojevi su 197 i 114.

24. Amir je pročitao knjigu za 4 dana. Drugi dan je pročitao 14 stranica više nego prvi dan. Treći dan je pročitao koliko prvi i drugi dan zajedno, a četvrti da je pročitao koliko polovinu broja pročitanih stranica drugog i trećeg dana. Koliko stranica je imala knjiga ako znamo da je Amir prvi dan pročitao 32 stranicu?
Rješenje:

Amir je prvi dan pročitao 32 stranicu, drugi dan 46 stranica, treći dan 78 stranica i četvrti dan pročitao je 62 stranice. Knjiga ima ukupno 218 stranica.

25. Svijeća visine $18cm$ jednoliko gori i cijela izgori za tri sata. Za koliko će minuta od trenutka kada je zapaljena, svijeća biti visine $13cm$?
Rješenje:

Prema uslovima zadatka cijela svijeća izgoriti će za 180 minuta? Jedan centimetar svijeće izgoriti će za $180:18 = 10$ minuta. Kako svijeća treba da izgori za $18 - 13 = 5\ cm$, od njene početne dužine, zaključujemo da će svijeća biti visoka $13cm$ nakon $5 \cdot 10 = 50$ minuta.

26. Izračunati: $\{345 - [(720:6) \cdot 2 - 4 + 2]:2 + 44\}:3 - 25:5 =$
Rješenje:

$\{345 - [(720:6) \cdot 2 - 4 + 2]:2 + 44\}:3 - 25:5 = 85$

27. Zbir dva broja je 96 a kada veči broj podijelimo manjim dobićemo količnik 9 i ostatak 6. O kojim brojevima je riječ?
Rješenje:

Ako su traženi brojevi x i y, onda po definiciji dijeljenja imamo $x:y = q(r)$ odakle djeljenjik x možemo pisati kao $x = q \cdot y + r$. Na osnovu teksta našeg zadatka imamo jednadžbe: $x + y = 96$ i $x = 9y + 6$ odakle dobijamo $9y + 6 + y = 96 \Longrightarrow y = 9$. Tada je drugi broj 87. Traženi brojevi su 87 i 9.

28. Da li je moguće da je za numeraciju stranica jedne knjige upotrebljeno 2016 cifara? Ako je moguće, koliko stranica će imati ta knjiga?
Rješenje:

Za prvih 9 stranica upotrebljeno je 9 cifara, za slijedečih 90 stranica upotrebljeno je $90 \cdot 2 = 180$ cifara. Ostatak cifara $2016 - 189 = 1827$ upotrebljeno je obilježavanje trocifrenih stranica kojih ima $1827:3 = 609$. Knjiga ima $9 + 90 + 609 = 708$ stranica.

29. Učenik je zamislio jedan broj. Kada ga je pomnožio sa 8 i tom proizvodu dodao 8 dobio je broj koji je za 11 veći od 701. Koji broj je učenik zamislio?
Rješenje:

Jedan od načina rješavanja zadatka jeste da se po tekstu zadatka formira jednadžba.
Pretpostavimo da je x traženi broj.
$8 \cdot x + 8 = 712 \implies x = 88$.
Traženi broj je 88.

30. Voćke su zasađene tako da je u svakom redu 15 voćki. Kada bi u voćnjaku bilo 6 redova manje, a u svakom redu 5 voćki više, onda bi u cijelom voćnjaku bilo ukupno 10 voćki više. Koliko je redova voćki zasađeno i koliko voćki ima u voćnjaku?
Rješenje:

Neka je u voćnjaku bilo x redova zasađeno. Tada je u voćnjaku bilo $15x$ voćaka. S druge strane, ako je 6 redova manje a u redovima pet voćaka manje, onda ukupno voćaka će biti $(x-6) \cdot 20 - 10$. Sada imamo jednadžbu $15x = (x-6) \cdot 20 - 10 \implies x = 26$
U voćnjaku je zasađeno ukupno 26 redova, a ukupno voćki ima 390.

31. Zbir tri broja je 689. Odredi te brojeve ako se zna da je zbir prvog i drugog broja 452, a drugog i trećeg 605.
Rješenje:

Označimo te brojeve sa a, b, c. Tada vrijedi $a + b + c = 689$, $a + b = 452$ i $b + c = 605$. Zamjenom prve jednakosti u drugu dobijamo $452 + c = 689 \implies c = 237$.
Zamjenom prve jednakosti u treću dobijamo: $a + 605 = 689 \implies a = 84$
Sada u drugu jednakost uvrstimo a i zračunamo b $84 + b = 452 \implies b = 368$

32. Ako se trocifrenom broju m doda broj 13, zbir je djeljiv sa 13. Ako se od broja m oduzme broj 17, razlika je djeljiva sa 17. Ako se broj m podijeli sa 2, količnik je djeljiv sa 2. Odredi broj m.
Rješenje:

Kako je zbir $m + 13$ djeljiv sa 13, a sabirak 13 djeljiv sa 13, onda je i broj m djeljiv sa 13. S obzirom da je razlika $m - 17$ djeljiva sa 17, a umanjitelj 17 djeljiv sa 17, onda je i m djeljiv sa 17. Budući da kada se m podijeli sa 2 dobijamo količnik djeljiv sa 2, onda je i m djeljivo sa 4. Dakle m mora biti djeljivo sa 13, 17 i 4. $S\ (13, 17, 4) = 884$. Traženi broj m je 884.

33. Proizvod tri prirodna broja je 13600. Izračunaj proizvod prvog i drugog broja ako je proizvod prvog i trećeg broja 544, a proizvod drugog i trećeg 425.
Rješenje:

Ako podijelimo proizvod sva tri broja s proizvodom prvog i trećeg broja, dobit ćemo drugi broj. Drugi broj je $13600 : 544 = 25$. Ako podijelimo proizvod sva tri broja s proizvodom drugog i trećeg broja, dobit ćemo prvi broj. Prvi broj je $13600 : 425 = 32$. Traženi proizvod prvog i drugog broja je $32 \cdot 25 = 800$.

34. Dvije cigle koštaju $3KM$ i pola cigle. Kolika je cijena jedne cigle?
Rješenje:

Neka je npr. Darko Emiru prodao dvije cigle za $3KM$ i pola cigle. Ovo pak znači da je Darko prodao samo ciglu i po za $3KM$ pa jedna cigla košta $2KM$. Zadatak se mogao riješiti i postavljanjem jednačine $2x = 3 + \frac{x}{2}$.

35. Izračunaj $(1 + 2 + 3 + \cdots + 52 + 53 + 54): 3: (3 \cdot 3: 3 \cdot 3) =$
Rješenje:

$(1 + 2 + 3 + \cdots + 52 + 53 + 54): 3: (3 \cdot 3: 3 \cdot 3) =$
$= 1485: 3: (9: 3 \cdot 3) = 495: (3 \cdot 3) = 495: 9 = 55$

36. Merlina je zamislila neki broj i dodala mu 25. Kada je taj broj pomnožila sa 25 dobila je 2025. Koji broj je zamislila Merlina?
Rješenje:

Označimo sa x broj koji je zamislila Merlina. Prema uslovima zadatka dobija se jednadžba
$(x + 25) \cdot 25 = 2025 \implies x = 56$.
Dakle, Merlina je zamislila broj 56.

37. Proizvod $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$ podijeliti brojem 4536.
Rješenje:
Kako je $4536 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$, to je
$(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9) : (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7) = 80$.

38. Iznos od $6000KM$ treba podijeliti na tri osobe tako da prva dobije dva puta više od druge, a treća $180KM$ više nego prva i druga zajedno. Koliko novca je dobila svaka osoba?
Rješenje:

$x -$ prva osoba
$y = 2x -$ druga osoba
$z = x + 2x + 180 -$ treća osoba
$x + 2x + x + 2x + 180 = 6000$
$6x = 5820 \ / :6$
$x = 970$
$y = 2 \cdot 970 = 1940$
$z = 970 + 1940 + 180 = 3090$

39. Izračunaj zbir svih prirodnih brojeva većih od 52, a manjih od 68.
Rješenje:

Trebamo izračunati koliko je $53 + 54 + 55 + \cdots + 66 + 67$. To ćemo izračunati tako da prvo izračunamo $1 + 2 + 3 + \cdots 67$, a zatim od toga oduzmemo zbir $1 + 2 + 3 + \cdots + 52$. Kako je $1 + 2 + 3 + \cdots + 67 = 2\ 278$, $1 + 2 + 3 + \cdots + 52 = 1\ 378$ i $2278 - 1378 = 900$, traženi broj je 900.

40. Odredi dvocifreni broj koji se poveća 26 puta ako mu sa lijeve strane dopišemo cifru 9.
Rješenje:

Neka je $\overline{ab} = x$ traženi dvocifreni broj. Vrijedi jednakost $\overline{9ab} = 900 + \overline{ab}$, odnosno $26x = 900 + x$, a odavde je $x = 36$ i to je traženi broj.

41. Koliko ukupno strana ima knjiga, ako prve tri strane nisu numerisane, a ostale su numerisane počevši od broja 1, i ako je za numeraciju knjige upotrijebljeno 375 cifara?
Rješenje:

Prve tri strane nisu numerisane, a za numerisanje slijedećih 9 strana upotrijebljeno je 9 cifara. Za numerisanje slijedećih 90 strana upotrebljeno je $2 \cdot 90 = 180$ cifara. Naredne strane su numerisane trocifrenim brojevima, a kako je upotijebljeno $375 - (180 + 9) = 186$ cifara, onda će takvih strana biti $186: 3 = 62$.
Dakle, knjiga ima ukupno $3 + 9 + 90 + 62 = 164$ strane.

42. Odredi zbir: $5+10+15+20+\cdots+2000+2005$.
Rješenje:

$5+10+15+20+\cdots+2000+2005=$
$=5\cdot(1+2+3+4+\cdots+400)+2005=$
$=\ 5\cdot 401\cdot 200+2005=403005$

43. Izračunaj razliku zbira svih parnih i zbira svih nepranih prirodnih brojeva manjih od 2007.
Rješenje:

$(2+4++6+\cdots+2004+2006)-(1+3+5+\cdots+2003+2005)=$
$=(2-1)+(4-3)+(6-5)+\cdots+(2004-2003)+(2006-2005)=$
$=1+1+1+\cdots+1+1=1003$

44. Selma je za rođendan od svojih prijatelja dobila 24 ruže. Ruže su bile bijele, žute i crvene boje. Bijelih je bilo dva puta manje od žutih, a crvenih koliko bijelih i žutih zajedno. Koliko je bilo bijelih, koliko žutih a koliko crvenih ruža?
Rješenje:

Označimo sa x broj bijelih ruža, onda na osnovu teksta zadatka imamo da je žutih $2x$ a crvenih $x+2x=3x$. Kako ih je ukupno bilo 24 postavimo jednadžbu:
$x+2x+3x=24\ \Longrightarrow x=4$

45. Odrediti trocifreni broj, ako za cifre tog broja vrijedi:
- Cifra desetica je 5;
- Zbir cifara je 15;
- Zamjenom cifara stotice i jedinice, novi broj je za 39 veći od dvostrukog starog broja.

Rješenje:

Cifra desetica u broju je 5 pa je zbir cifara stotica i jedinica 10. Sa x označimo cifru stotica, onda je $10\ -\ x$ cifra jedinica. Sada trocifreni broj možemo zapisati kao:
$\overline{x510-x}=100\cdot x+10\cdot 5+1\cdot(10-x)=100x+50+10-x=99x+60$
Novi broj nastaje zamjenom cifara stotica i jedinica, tj.
$\overline{10-x5x}=100\cdot(10-x)+10\cdot 5+1\cdot x$ i vrijedi slijedeća jednakost:
$100\cdot(10-x)+10\cdot 5+1\cdot x=2(99x+60)+39$
$1000-100x+50+x=198x+120+39$
$297x=891$
$x=3$
Cifra stotica je 3 onda je cifra jedinica $10-3=7$, dakle traženi broj je 357.

46. Odredi najmanji i najveći petocifreni neparni prirodni broj kojem su 3 cifre neparne, a 2 parne.
Rješenje:

Prirodni broj je neparan ako mu je cifra jedinica $1, 3, 5, 7$ ili 9.
Da bi broj bio najmanji mogući cifre mu trebaju biti 1 i 0, a da bi bio najveći mogući cifre mu trebaju biti 9 i 8.
Najmanji peterocifreni neparni prirodni broj kojemu su 3 cifre neparne, a 2 parne je broj 10011.
Najveći peterocifreni neparni prirodni broj kojemu su 3 cifre neparne, a 2 parne je broj 99889.

47. Koliki je zbir svih dvocifrenih prirodnih brojeva ?
Rješenje:

$99 - 10 + 1 = 90$ sabiraka
$(10 + 99) + (11 + 98) + \cdots + (54 + 55) = 109 \cdot 45 = 4905$

48. Od 262 učenika jedne škole 125 trenira odbojku, 67 karate, a 116 učenika ne trenira niti jedan od ovih sportova. Koliko učenika trenira i odbojku i karate? Koliko učenika trenira samo karate?
Rješenje:

$262 - 116 = 146$
$(125 + 67) - 146 = 46$ učenika trenira i odbojku i karate, a $67 - 46 = 21$ samo karate.

49. Otac ima pet sinova, pri čemu su svi sinovi različite starosti. Otac ima odredenu količinu novca koju želi podijeliti petorici svojih sinova. Najmlađem će dati najmanje novca, a svakom slijedećem starijem po $5KM$ više. Najstariji sin će dobiti 3 puta više KM nego najmlađi. Koliko će novaca dobiti sin koji je treći po starosti?
Rješenje:

Treći po starosti dobiće $20KM.$

50. Zbir četri broja je 100. Zbir prvog, trećeg i četvrtog je 65, a zbir prvog, drugog i trećeg je 78. Odredi te brojeve ako je prvi za 10 manji od drugog.
Rješenje:

$25, 35, 18, 22$

51. Zbir tri broja je 5280. Prvi broj je za 340 veći od drugog, a tri puta manji od zbira drugog i trećeg. Koliki je svaki broj?
Rješenje:

$1320, 980, 2980$

52. U pet kutija se nalazi ukupno 200 kuglica. U prvoj i drugoj ima 104 kuglice, a u drugoj i trećoj 86 kuglica, u trećoj i četvrtoj 68 kuglica, a u četvrtoj i petoj ima 60 kuglica. Koliko kuglica ima u svakoj kutiji?
Rješenje:

$54, 50, 36, 32, 28$

53. Jedan učenik je kupio 4 knjige. Za prve tri knjige je platio $1600\ KM$, za prvu, drugu i četvrtu je platio $2100\ KM$. Za prvu, treću i četvrtu je dao $2400\ KM$, a za drugu, treću i četvrtu $2600\ KM$. Koliko košta svaka od knjiga?
Rješenje:

$300, 500, 800, 1300$

54. Zbir četiri broja je 208. Ako se prvom broju doda 3 ili se drugom oduzme 3 ili se treći pomnoži sa 3 ili se četvrti podijeli sa 3, uvijek se dobije isti rezultat. Odredi ova 4 broja?
Rješenje:

$36, 42, 13, 117$

55. U jednoj korpi ima dva puta više jabuka nego u drugoj. Ako se iz svake korpe uzme po 20 jabuka onda će u prvoj korpi ostati 3 puta više nego u drugoj. Koliko je bilo jabuka u svakoj korpi?
Rješenje:

$x = 80$ i $y = 40$

56. Od tri broja a, b, c sabiranjem po dva dobili smo $332,\ 408,\ 466$. Odrediti te brojeve.
Rješenje:

$137, 195, 271$

57. U bazenima a, b, c, d i e nalazi se ukupno 130 riba. U bazenu a i b ima ukupno 50 riba, u bazenu b i c ma 56, u bazenu c i d ima 53 a u d i e ima 48 riba. Koliko riba ima u svakom bazenu?

Rješenje:

$26, 24, 32, 21, 27$

58. Učenik je kupio 4 knjige. Prve tri koštaju $36\ KM$, sve knjige bez druge koštaju $40\ KM$, bez treće $38\ KM$, a sve bez prve koštaju $42\ KM$. Koliko košta svaka knjiga ponaosob?

Rješenje:

$I + II + III = 36$

$I + III + IV = 40$

$I + II + IV = 38$

$\underline{II + III + IV = 42}$ Saberemo sve četiri jednakosti pa imamo:

$3I + 3II + 3III + 3IV = 36 + 40 + 38 + 42$

$3(I + II + III + IV) = 156$

$I + II + III + IV = 156: 3$

$\underbrace{I + II + III}_{=36} + IV = 52 \Rightarrow IV = 52 - 36 \Rightarrow IV = 16$

Nastavljajući isti postupak imamo: $I = 10\ KM \quad II = 12\ KM \quad III = 14\ KM \quad IV = 16\ KM$

59. Zbir 100 uzastopnih prirodnih brojeva je 6050. Koji su to brojrvi?

Rješenje:

Neka su traženi uzastopni prirodni brojevi:

$x, x + 1, x + 2, \dots, x + 99$

$x + x + 1 + x + 2 + \dots + x + 99 = 6050$

$100x + (1 + 2 + 3 + \dots + 99) = 6050$

$1 + 2 + 3 + \cdots + 99 = 1 + 99 + 2 + 98 + 3 + 97 + \cdots + 49 + 51 + 50 = 49 \cdot 100 + 50 =$

$= 4900 + 50 = 4950$

$100x + 4950 = 6050$

$100x = 6050 - 4950$

$100x = 1100$

$x = 1100: 100$

$x = 11$

Traženi uzastopni brojevi su: 11, 12, 13, ..., 109, 110.

60. Proizvod dva dvocifrena broja zapisan je samo pomoću četvorki. Odrediti te brojeve!

Rješenje:

Proizvod dva dvocifrena broja može biti samo trocifren ili četverocifren broj. Po uslovu zadatka može biti ili 444 ili 4444.
Rastavljanjem brojeva na faktore imamo $444 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 37 = 12 \cdot 37$ pa je jedino rješenje 12 i 37.
$4444 = 4 \cdot 11 \cdot 101$ gdje je 101 prost broj pa zaključujemo da je 4444 nemoguće zapisati kao proizvod dvocifrenih brojeva pa je moguće samo prvo rješenje.

61. Zbir tri broja je 240. Zbir prvog i drugog broja je 110, a zbir prvog i trećeg broja je 180. Odredi te brojeve.

Rješenje:

I način

Neka su to brojevi: a, b i c
Prema uslovima zadatka:
$a + b + c = 240$
$a + b = 110$
$a + c = 180$

$(a + b) + c = 240$
$110 + c = 240$
$c = 240 - 110$
$c = 130$

$(a + c) + b = 240$
$180 + b = 240$
$b = 240 - 180$
$b = 60$

$a + (b + c) = 240$
$a + (130 + 60) = 240$
$a + 190 = 240$
$a = 240 - 190$
$a = 50$

Traženi brojevi su 50, 60 i 130

II način

$240 - 110 = 130$
$240 - 180 = 60$
$240 - (130 + 60) = 240 - 190 = 50$

62. U dvije posude je bilo ukupno $40\ l$ vode. Ako iz prve posude prespemo u drugu posudu $5\ l$ tada će u drugoj posudi biti tri puta više vode. Koliko je bilo u svakoj posudi vode?
Rješenje:

I način

Iz uslova zadatka proizilazi da je nakon presipanja u posudama ukupno 4 jednaka dijela $40l : 4 = 10l$ jedan dio. U prvoj posudi $10l$. U drugoj posudi $10l \cdot 3 = 30l$.

Prije presipanja u posudama je bilo:

$10l + 5l = 15l$ u prvoj posudi vode
$30l - 5l = 25l$ u drugoj posudi vode

II način

Prije presipanja:

xl u prvoj posudi

yl u drugoj posudi

$x + y = 40 \Rightarrow y = 40 - x$

Poslije presipanja:

$(x-5)l$ u prvoj posudi

$(y+5)l$ u drugoj posudi

Prema uslovu zadatka je:

$3 \cdot (x-5) = y+5$

$3 \cdot (x-5) = 40 - x + 5 \Longrightarrow x = 15$

$y = 40 - x \Longrightarrow y = 25$

U posudama je bilo $15\ l$ i $25\ l$.

63. Amir, Mario i Alen su skupljali sličice. Amir i Mario su skupili 206 sličica, Alen i Mario 165, a Amir i Alen 183. Koliko je svaki od njih skupio sličica ako su ukupno imali 277 sličica?

Rješenje:

$a + b = 206$

$b + c = 165$

$a + c = 183$

$\overbrace{a+b}^{=206} + c = 277 \Longrightarrow c = 71$

$b = 165 - 71 = 94$

$a = 183 - 71 \quad a = 112$

Amir je imao 112, Mario 94, a Alen 71 sličicu.

64. Za numerisanje knjige *„Derviš i smrt" – Meša Selimović* upotrijebljeno je 1290 cifara. Koliko stranica ima ta knjiga?

Rješenje:

$(1290 - 189) : 3 = 367$

$367 + 90 + 9 = 466$

Knjga ima 466 stranica

65. U jednoj ulici kuće su numerisane tako da su sa jedne strane kuće sa parnim, a sa druge strane kuće sa neparnim brojevima. Sa neparne strane brojevi idu od 1 do 169, a sa parne od 2 do 114. Koliko je cifara (znakova) upotrebljeno za numerisanje svih kuća u toj ulici?

Rješenje:

Sa neparne strane je upotrebljeno: $5 \cdot 1 + 45 \cdot 2 + 35 \cdot 3 = 5 + 90 + 105 = 200$ cifara.

Sa parne strane je upotrebljeno: $4 \cdot 1 + 45 \cdot 2 + 8 \cdot 3 = 4 + 90 + 24 = 118$ cifara.

Ukupno je za numerisanje kuća u ulici upotrebljeno: $200 + 118 = 318$ cifara.

66. Zbir nekih 20 uzastopnih prirodnih brojeva je 2590. Koji su to brojevi?
Rješenje:

To su brojevi: $x, x+1, x+2, ..., x+19, x+20$

$x + x + 1 + x + 2 + \cdots + x + 19 = 2590$

$20x + (9 \cdot 20 + 10) = 2590$

$20x + 180 + 10 = 2590$

$20x + 190 = 2590$

$20x = 2400$

$x = 120$

Djeljivost u skupu prirodnih brojeva

1. Odredi najmanji prirodni broj zapisan pomoću cifara 0 i 4 djeljiv s 15.
Rješenje:

Prirodni broj je djeljiv s 15 ako je djeljiv i s 3 i s 5. Da bi bio djeljiv s 5, zadnja cifra mu mora biti 0. Da bi bio djeljiv s 3, zbir cifara mu mora biti djeljiv s 3. Najmanji zbroj četvorki djeljiv s 3 je $4 + 4 + 4$. Traženi broj je broj 4440.

2. Zadana su tri broja: prvi broj pri dijeljenju sa 9 ima ostatak 6, drugi broj pri dijeljenju sa 9 ima ostatak 4, a treći broj pri dijeljenju sa 9 ima ostatak 5. Koliki ostatak pri dijeljenju sa 9 ima njihov zbroj?
Rješenje:

Ti brojevi su oblika $9a + 6$, $9b + 4$ i $9c + 5$. Njihov zbir je
$(9a + 6) + (9b + 4) + (9c + 5) = 9a + 6 + 9b + 4 + 9c + 5 = 9a + 9b + 9c + 15$.
Početni dio $9a + 9b + 9c$ je djeljiv s 9, no ostatak pri dijeljenju sa 9 ne može biti 15 (jer ostatak ne može biti veći od djelitelja), pa kad još i 15 rastavimo, dobijemo da je zbir zadanih brojeva jednak $9a + 9b + 9c + 9 + 6$, otkud zaključujemo da je ostatak pri dijeljenju sa 9 jednak 6.

3. Odredi najmanji četverocifreni broj djeljiv sa brojem 15.
Rješenje:

Najmanji četverocifreni brojevi imaju prvu cifru 1. Zbog djeljivosti s 5 zadnja cifra mu mora biti 0 ili 5, a zbog djeljivosti s 3 zbir cifara mu mora biti djeljiv sa 3. Ako je zadnja cifra 0, taj broj izgleda ovako 1 _ _ 0 , a srednje cifre biramo tako da zbir svih cifara bude djeljiv s 3 i da broj bude što manji, pa dobijemo broj 1020. Ako je zadnja cifra 5, onda taj broj izgleda ovako 1 _ _ 5, pa srednje cifre mogu biti nule, tj. radi se o broju 1005. Manji od navedenih brojeva je 1005, pa je to traženi broj.

4. Odredi sve prirodne brojeve oblika $\overline{9a6b9}$ djeljive s 3 kojima su cifre desetice i tisućice prosti brojevi.
Rješenje:

Broj je djeljiv s 3 ako je zbir njegovih cifara djeljiv s 3 pa je zbir
$9 + a + 6 + b + 9 = 24 + a + b$ djeljiv s 3. Kako su a i b prosti brojevi, onda su
$a, b \in \{2, 3, 5, 7\}$.
Za $a = 2$ imamo da je $26 + b$ djeljiv s 3 pa je $b = 7$
Za $a = 3$ imamo da je $27 + b$ djeljiv s 3 pa je $b = 3$
Za $a = 5$ imamo da je $29 + b$ djeljiv s 3 pa je $b = 7$
Za $a = 7$ imamo da je $31 + b$ djeljiv s 3 pa je $b \in \{2, 5\}$.
Traženi brojevi su 92679, 93639, 95679, 97629, 97659.

5. Odredi najmanji sedmocifren broj $\overline{3219abc}$ koji je djeljiv sa 90.
Rješenje:

Da bi broj bio djeljiv sa 90 treba biti djeljiv sa 9 i 10. Ako je broj djeljiv sa 10 onda on završava sa 0. Na osnovu toga zaključujemo da je naš broj oblika $\overline{3219ab0}$. Kako je broj djeljiv sa 9 to je i zbir cifara našeg broja djeljiv sa 9. Zbir cifara našeg broja je $15 + a + b$. Da bi ovaj zbir bi djeljiv sa 9, mora biti $a + b = 3$ ili $a + b = 12$, tj. cifre a i b su rješenja uređenih parova brojeva: $(a, b) = \{(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0), (3, 9), (4, 8), (5, 7), (6, 6), (7, 5), (8, 4), (9, 3)\}$. Zaključujemo da je traženi najmanji takav broj koji je djeljiv sa 90, broj 3 219 030.

6. Naći sve šestocifrene brojeve oblika $\overline{x2016y}$ koji su djeljivi sa 36.
Rješenje:

Broj treba biti djeljiv sa 4 i sa 9. Ako bi dati broj bio djeljiv sa 4 onda su traženi brojevi oblika: $\overline{x20164}$, $\overline{x20168}$. Sada trebamo još provjeriti da dati brojevi budu djeljivi sa 9, tj. da im zbir cifara bude djeljiv sa 9. Za prvi broj imamo slučaj 520164, a za drugi 120168. Dakle, traženi brojevi su: 520164 i 120168.

7. Odrediti sve trocifrene brojeve koji su djeljivi sa 4 i čiji je proizvod cifara 24.
Rješenje:

Kako je proizvod cifara tih brojeva 24 ti brojevi su sačinjeni od faktora tog broja. Rastavimo 24 na faktore. Imamo: $24 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$. Dati brojevi moraju biti trocifreni i djeljivi sa 4. Traženi brojevi su: 164, 416.

8. U parku su posađeni ružini grmovi. Ima ih više od 350, a manje od 400. Koliki je tačan broj grmova ako znamo da su sađeni u redovima, a u svakome je 51 grm?
Rješenje:

Ako je u svakom redu 51 grm, onda je broj grmova djeljiv s 51. Brojevi djeljivi s 51 su: $51, 102, 153, 204, 255, 306, 357, 408$ itd. Od svih njih, između 350 i 400 se nalazi 357. Dakle, bilo je tačno 357 grmova.

9. Odredi sve osmocifrene prirodne brojeve oblika $\overline{aaaabbbb}$ djeljive s 15. Postupak obrazloži.
Rješenje:

Ako je broj djeljiv s 15, onda je djeljiv i s 5 i s 3. Zbog djeljivosti s 5 cifra b zadanog broja može biti 5 ili 0. Zbog djeljivosti s 3 zbir cifara zadanog broja mora biti djeljiv s 3
1. slučaj: $b = 0$
Zadani osmocifreni broj je oblika $\overline{aaaa0000}$. Zbir njegovih cifara je $4 \cdot a$ pa vrijedi da je $a \in \{3, 6, 9\}$.

Traženi brojevi su 33330000, 66660000 i 99990000.

2. slučaj $b = 5$

Zadani osmocifreni broj je oblika $\overline{aaaa5555}$. Zbir njegovih cifara je $4 \cdot a + 20$ pa vrijedi da je $a \in \{1, 4, 7\}$.

Traženi brojevi su 11115555, 44445555 i 77775555.

10. Zadana su dva broja: prvi broj pri dijeljenju sa 7 ima ostatak 3, dok drugi broj pri dijeljenju sa 7 ima ostatak 4. Koliki ostatak pri dijeljenju sa 7 ima njihov zbir?

Rješenje:

Pošto prvi broj pri dijeljenju sa 7 ima ostatak 3, on je oblika $7a + 3$. Drugi broj pri dijeljenju sa 7 ima ostatak 4, pa je on oblika $7b + 4$. Pogledajmo njihov zbir:

$$(7a + 3) \ + \ (7b + 4) \ = \ 7a + 3 + 7b + 4 \ = \ 7a + 7b + 7.$$

Taj je izraz djeljiv sa 7 jer su svi sabirci djeljivi sa 7. Dakle, njihov zbir pri dijeljenju sa 7 ima ostatak 0.

11. Odredi cifru X u broju $512X4$ tako da taj broj bude djeljiv sa 36.

Rješenje:

Broj je djeljiv sa 36 ako je istovremeno djeljiv sa 4 i sa 9. Broj je djeljiv sa 4 ako mu je dvocifreni završetak djeljiv sa 4, $X \in \{0 , 2 , 4 , 6 , 8\}$, tj to su brojevi : $51204 , 51224 , 51264 , 51284$. Broj je djeljiv sa 9 ako mu je zbir cifara djeljiv sa 9. $X \ = \ 6$, tj. to je broj 51264. Vidimo da je broj koji se ponavlja 51264 (djeljiv sa 4 i sa 9), pa je $X = 6$ rješenje našeg zadatka.

12. Orediti razliku najvećeg i najmanjeg peterocifrenog broja djeljivih sa 127.

Rješenje:

Kako je $10\,000 : 127 = 78(4)$ i $99\,999 : 127 = 787(50)$, najmanji broj je $127 \cdot 79 = 10\,003$. Najveći traženi broj $999999 - 50 = 999949$.

13. Od četiri proizvoljno odabrana prirodna broja uvijek će se naći dva koja pri dijeljenju sa 3 daju isti ostatak. Dokazati!

Rješenje:

Ostaci pri dijeljenju sa 3 mogu biti 0, 1 i 2 (najviše 3 različita ostatka). Kako imamo 4 broja a najviše 3 različita ostatka, bar 2 od 4 broja imaju iste ostatke pri dijeljenju sa 3.

14. Zbir dva dvocifrena broja koji se zapisuju istim ciframa a u obrnutom redosljedu je djeljiv sa 55. Odredi te brojeve.
Rješenje:

$\overline{ab}+\overline{ba}=(10a+b)+(10b+a)=11(a+b)$. Zbir takva dva broja je uvijek djeljiv sa 11 pa je potrebno još samo da zbir cifara $a+b$ bude djeljiv sa 5. To su brojevi 14 i 41 ili 23 i 32.

15. Razliku najvećeg i najmanjeg petocifrenog broja s različitim ciframa koji su djeljivi brojem 15 zaokruži na najbližu deseticu.

Rješenje:
Vrijedi $15=3\cdot 5$. Iz djeljivosti s 5 slijedi da su cifre jedinica traženih petocifrenih brojeva 0 ili 5, a iz djeljivosti s 3 da je zbir njihovih cifara djeljiv sa 3. Najmanji takav broj je 10245, a najveći 98760. Njihova razlika je 88515, a zaokružena vrijednost je 88520.

16. Dokaži da je zbir tri uzastopna prirodna broja djeljiv sa brojem 3.
Rješenje:

Neka su tri uzastopna prirodna broja $n, n+1, n+2$. Ako saberemo ove brojeve $n+n+1+n+2=3n+3=3(n+1)$. Proizvod je djeljiv sa nekim brojem ako je bar jedan faktor djeljiv tim brojem, pa zaključujemo da je proizvod $3(n+1)$ djeljiv sa brojem 3.

17. Naći najmanji i najveći trocifren prirodan broj koji pri dijeljenju sa 16 ima količnik isti kao i ostatak .
Rješenje:

Traženi broj je $16q\ +\ q\ =\ 17q$, pa se najmanji traženi broj dobiva za $q\ =\ 6$, tj. $17\cdot\ 6\ =\ 102$. Najveći traženi broj se dobiva za $q\ =\ 15$, jer je 15 najveći ostatak pri dijeljenju sa 16, znači $17\cdot 15\ =\ 255$.

18. Odrediti najmanji prirodan broj djeljiv sa 36 koji je zapisan samo ciframa 4 i 7.
Rješenje:

Broj koji je djeljiv sa 36 mora da bude djeljiv sa 4 i sa 9. Ako je djeljiv sa 4, a zapisuje se samo ciframa 7 i 4, on mora da se završava sa 44. Zbir cifara toga broja treba da bude djeljiv sa 9, pa kako su slučajevi $8\ +\ 1$ i $8\ +\ 10$, tj. $8\ +\ 4\ +\ 4\ +\ 4\ +\ 7$, pa je traženi broj 444744 .

19. Odrediti cifre a i b tako da je $\frac{\overline{199a1b}}{12}$ prirodan broj .
Rješenje:

Da bi traženi količnik bio prirodan broj , mora dati broj $\overline{199a1b}$ biti djeljiv sa 12, a to znači sa 3 i 4. Kako dvocifreni završetak $\overline{1b}$ mora biti djeljiv sa 4, to je $b = 2$ ili $b = 6$. Ako je $b = 2$ onda je zbir cifara datog broja jednak $22 + a$, pa zbog djeljivosti sa 3, a može biti 2, 5 ili 8. Ako je $b = 6$, onda je zbir cifara $26 + a$, pa u tom slučaju a može biti 1, 4 ili 7. Svi traženi brojevi su 199116, 199212, 199416, 199512, 199716, 199812.

20. Odrediti najveći četverocifreni broj koji pri dijeljenju sa 3, 4, 5, 6 i 7 daje ostatak 2.
Rješenje:

Kako je $S(3,4,5,6,7) = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 = 420$, traženi broj je $420k + 2$, pri čemu je $420k + 2 \leq 9999$. Dakle najveći takav broj je 9662 .

21. Odrediti sve vrijednosti cifara a i b tako da razlomak $\frac{a2012b}{36}$ bude prirodan broj!
Rješenje.

– da bi razlomak bio prirodan broj, brojnik treba biti djeljiv sa nazivnikom, pa u našem slučaju nazivnik treba da je djeljiv sa 4 i 9 istovremeno zato što je $4 \cdot 9 = 36$
– da bi $a2012b$ bio djeljiv sa 4 njegov dvocifreni završetak mora biti djeljiv sa 4 pa cifra jedinica b može imati jednu od vrijednosti $b \in \{0, 4, 8\}$
− da bi $a2012b$ bio djeljiv sa 9 zbir njegovih cifara treba da bude djeljiv sa 9
1° ako je $\boldsymbol{b = 0} \Rightarrow 2 + 0 + 1 + 2 + 0 = 5 \Rightarrow \boldsymbol{a = 4}$
2° ako je $\boldsymbol{b = 4} \Rightarrow 2 + 0 + 1 + 2 + 4 = 9 \Rightarrow \boldsymbol{a = 9}$
3° ako je $\boldsymbol{b = 8} \Rightarrow 2 + 0 + 1 + 2 + 8 = 13 \Rightarrow \boldsymbol{a = 5}$

22. Dokaži da zbir 6 uzastopnih prirodnih brojeva nikad nije djeljiv sa 2!
Rješenje:

$n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) + n + 5 = 6n + 15 = 3(2n + 5)$
Što nije djeljivo sa 2 jer su oba faktora neparni brojevi.

23. Zadana su dva broja: prvi broj pri dijeljenju sa 12 ima ostatak 5, dok drugi broj pri dijeljenju sa 12 ima ostatak 3. Koliki ostatak pri dijeljenju sa 12 ima njihov zbir ?
Rješenje:

Ti brojevi su oblika $12a + 5$ i $12b + 3$, pa je njihov zbir

$$(12a + 5 + 12b + 3) = 12a + 12b + 8$$

početni dio $12a + 12b$ je djeljiv sa 12, pa je ostatak zbira pri dijeljenju sa 12 jednak 8.

24. Odrediti sve trocifrene prirodne brojeve koji su djeljivi sa 4 i čiji je proizvod cifara jednak 24. Odgovor obrazložiti?
Rješenje:

Proizvod 24 je moguć u kombinacijama: $1 \cdot 3 \cdot 8$; $1 \cdot 4 \cdot 6$; $2 \cdot 2 \cdot 6$; $2 \cdot 3 \cdot 4$ .Traženi brojevi su 164, 416, 324 i 432 jer su samo njihovi dvocifreni završeci djeljivi sa 4, tj. ti brojevi su djeljivi sa 4.

25. Koji brojevi manji od 100 pri dijeljenju sa 4 i pri dijeljenju sa 26 daju ostatak 1?
Rješenje:

$S(4, 26) = 52$
$n = 52 \cdot k + 1 < 100 \;\Rightarrow k = 0 \vee \; k = 1$
$\Rightarrow n = 1 \vee \; n = 53$

26. U broju $\overline{35X4}$ odredi X tako da broj bude djeljiv sa 12.
Rješenje:

Zbog djeljivosti sa 3 X može biti 0,3,6,9, kako je broj djeljiv i sa 4 od ove četiri cifre ostaje da X može biti 0 ili 6.

27. U četvorocifrenom broju $\overline{32x2}$ odredi vrijednost cifre x tako da dobiveni broj bude djeljiv sa 12.
Rješenje:

Broj je djeljiv sa 12 ako je djeljiv sa 3 i 4. Da bi broj $\overline{32x2}$ bio djeljiv sa 3, zbir cifara mu mora biti djeljiv sa 3. Cifra x može biti 2, 5 ili 8. Zbog djeljivosti sa 4, zadnje dvije cifre moraju biti djeljive sa 4. Od tri slučaja $(22,\ 52,\ 82)$ je konačno rješenje 52 odnosno $x = 5$.

28. Odredi četverocifrene brojeve oblika $\overline{x11y}$ tako da budu djeljivi sa 36.
Rješenje:

Broj će bitidjeljiv sa 36 ako je djeljiv sa 4 i sa 9. Da bi broj bio djeljiv sa 4 treba da bude $\overline{1y}$ djeljivo sa 4.
Znači da $y \in \{2, 6\}$.
Za $y = 2$ imamo zbir cifara $x + 1 + 1 + 2 = x + 4$ da bude djeljiv sa 9, znači $x = 5$ jer je $5 + 4 = 9$.
Za $y = 6$ imamo zbir cifara $x + 1 + 1 + 6 = x + 8$ da bude djeljiv sa 9, znači $x = 1$ jer je $1 + 8 = 9$.
Traženi brojevi su 5112 i 1116.

29. Proizvod pet uzastopnih prirodnih brojeva je broj $\overline{95 * 4 *}$. Odrediti nepoznate cifre.
Rješenje:

Od pet uzastopnih prirodnih brojeva bar jedan mora biti djeljiv sa 2, bar jedan sa 3 i bar jedan sa 5, pa proizvod tih pet brojeva mora biti djeljiv i sa 10 i sa 3 .Zbog toga, cifra jedinica mora biti 0, a ako cifru stotina obilježimo sa a, zbir $9 + 5 + a + 4 + 0$ mora biti djeljiv sa 3. Slijedi da je $a \in \{0, 3, 6, 9\}$. Provjerom za svako a iz ovog skupa slijedi da je jedino za $a = 0$ dobiveni broj proizvod 5 uzastopnih brojeva i to $95040 = 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12$.

30. Ako se brojevi 8746 i 1652 podijele jednim istim brojem dobiju se redom ostaci 16 i 14. Odredi broj kojim je vršeno dijeljenje .
Rješenje:

Uvrstimo redom ostatke te ih oduzmimo od mjernih brojeva $8746 - 16$ i $1652 - 14$, pa dobijemo 8730 i 1638. Ovi brojevi djeljivi su sa 2, 9 i 18. Međutim, ostaci dijeljenja su 16 i 14, a količnik mora biti veći od ostatka, pa je traženi zajednički djelilac 18.

31. Odredi najmanji četverocifreni broj djeljiv sa brojem 72 koji ima sve cifre različite.
Rješenje:

1008 ako se ponavljaju, 1512 za različite cifre.

32. Napiši: a) najveći, b) najmanji petocifreni broj čija je cifra jedinica 7, a koji je djeljiv brojem 9.
Rješenje:

a) 99927
b) 10017

33. Napiši najmanji i najveći četverocifreni broj djeljiv sa 15.
Rješenje:

9990, 1005

Razlomci

1. Aida sa 77 koraka jednake dužine pređe $67m$, a Alen sa 88 koraka jednake dužine pređe $78m$. Čiji korak je duži i za koliko?

Rješenje:

Aidin korak:

$$\frac{67}{77}m = \frac{67 \cdot 8}{77 \cdot 8}m = \frac{536}{616}m$$

Alenov korak:

$$\frac{78}{88}m = \frac{78 \cdot 7}{88 \cdot 7}m = \frac{546}{616}m$$

Alenov korak je duži za:

$$\frac{546}{616}m - \frac{536}{616}m = \frac{10}{616}m = \frac{5}{308}m$$

2. Nađi prosti broj p tako da važi $\frac{4}{21} < \frac{3}{p} < \frac{6}{17}$

Rješenje:

$$\frac{4}{21} < \frac{3}{p} < \frac{6}{17}$$

$$\frac{12}{63} < \frac{12}{4p} < \frac{12}{34}$$

$$34 < 4p < 63 \;\; \Rightarrow p \in \{11, 13\}$$

3. Brojnik i nazivnik se razlikuju za 72. Skraćivanjem se dobije $\frac{7}{15}$ koji je to razlomak?

Rješenje:

$$\frac{a}{b} = \frac{7 \cdot n}{15 \cdot n}, a = b - 72, \frac{b-72}{b} = \frac{7 \cdot n}{15 \cdot n}, 7n = b - 72$$

$$b = 15n$$

$$7n = 15n - 72 \;\; \Rightarrow n = 9, b = 135, a = 63$$

4. Bez dijeljenja i bez dovođenja na zajednički imenilac uporediti razlomke $\frac{577}{777}$ i $\frac{5777}{7777}$.

Rješenje:

Posmatrajmo:

$$1 - \frac{577}{777} = \frac{777 - 577}{777} = \frac{200 \cdot 10}{777 \cdot 10} = \frac{2000}{7770}$$

$1-\frac{5777}{7777}=\frac{7777-5777}{7777}=\frac{2000}{7777}$

Kako je

$\frac{2000}{7770}>\frac{2000}{7777} \Rightarrow \frac{577}{777}<\frac{5777}{7777}$

5. Odredi sve parove prirodnih brojeva x i y za koje vrijedi $\frac{x}{5}-\frac{2}{y}=\frac{4}{5}$.

Rješenje:

Provjerom za $x \in \{1, 2, \dots, 8\}$ dobivaju se dva rješenja: $x=6$, $y=5$ i $x=9$, $y=2$.

6. Šta je veće: a) $\frac{11}{56}$ ili $\frac{55}{279}$;

b) $\frac{676}{667}$ ili $\frac{2027}{2002}$

Rješenje:

a) Proširivanjem prvog razlomka sa 5 , dobivamo $\frac{11}{56}=\frac{55}{280} \Rightarrow \frac{11}{56}<\frac{55}{279}$.

b) Proširivanjem sa 3 imamo $\frac{676}{667}=\frac{2028}{2001} \Rightarrow \frac{2028}{2001}>\frac{2028}{2002}>\frac{2027}{2002}$.

7. Uporediti razlomke: $\frac{19}{98}, \frac{1919}{9898}, \frac{191919}{989898}$.

Rješenje:

Drugi i treći razlomak mogu da se skrate : $\frac{1919}{9898}=\frac{19 \cdot 101}{98 \cdot 101}=\frac{19}{98}$ i $\frac{191919}{989898}=\frac{19 \cdot 10101}{98 \cdot 10101}=\frac{19}{98}$ pa zaključujemo da su svi razlomci jednaki.

8. Odredi sve proste brojeve p za koje važi $\frac{8}{63}<\frac{1}{p}<\frac{2}{5}$.

Rješenje:

Ako posmatramo recipročne vrijednosti, treba da bude $\frac{5}{2}<p<\frac{63}{8}$ odnosno $3 \leq p \leq 7$ pa je $p \in \{3, 5, 7\}$.

9. Šta je veće $\frac{3*5*}{36}$ ili $\frac{5*3*}{45}$ ako umjesto zvjezdica mogu da stoje bilo koje cifre .

Rješenje:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Najveća moguća vrijednost razlomka } \frac{3*5*}{36} \text{ je } \quad \frac{3959}{36}<\frac{3600+360}{36}=110 \\ \text{Najmanja moguća vrijednost razlomka } \frac{5*3*}{45} \text{ je } \quad \frac{5030}{45}>\frac{4500+450}{45}=110\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3*5*}{36}<110<\frac{5*3*}{45}$$

10. Odrediti sve prirodne brojeve n tako da važi nejednakost $\frac{3}{8} < \frac{n}{12} < \frac{11}{18}$.

Rješenje:

$NZS(8, 12, 18) = 72$

$\frac{3}{8} < \frac{n}{12} < \frac{11}{18} \implies \frac{27}{72} < \frac{6n}{72} < \frac{44}{72} \implies 27 < 6n < 44 \implies n \in \{5, 6, 7\}$

11. Odrediti a, b, c ako je $1 + \frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c}}} = \frac{43}{50}$.

Rješenje:

$$\frac{43}{50} = 1 + \frac{13}{30} = 1 + \frac{1}{\frac{30}{13}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{4}{13}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{13}{4}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}$$

– dakle, dobili smo $1 + \frac{1}{\boldsymbol{a}+\frac{1}{\boldsymbol{b}+\frac{1}{\boldsymbol{c}}}} = 1 + \frac{1}{\mathbf{2}+\frac{1}{\mathbf{3}+\frac{1}{\mathbf{4}}}}$ odakle zaključujemo da je $a = 2, b = 3, c = 4$

12. Naći sve razlomke sa jednocifrenim imeniocem od kojih je svaki veći od $\frac{7}{9}$ a manji od $\frac{8}{9}$

Rješenje:

Razlomke $\frac{7}{9}$ i $\frac{8}{9}$ redom proširimo brojevima $2, 3, \dots, 8$ i dobivamo razlomke:

- par $\frac{14}{18}, \frac{16}{18}$, između je razlomak $\frac{15}{18} = \frac{5}{6}$
- par $\frac{21}{27}, \frac{24}{27}$, između su razlomci $\frac{22}{27}$ i $\frac{23}{27}$
- par $\frac{28}{36}, \frac{32}{36}$, od parova između, može se jedino par $\frac{30}{36}$ skratiti, $\frac{30}{36} = \frac{5}{6}$ (pronađeno rješenje)
- par $\frac{35}{45}, \frac{40}{45}$, zadovoljava razlomak $\frac{36}{45} = \frac{4}{5}$
- par $\frac{42}{54}, \frac{48}{54}$, jedan par se može kratiti: $\frac{45}{54} = \frac{5}{6}$ (pronađeno rješenje)
- par $\frac{49}{63}, \frac{56}{63}$, jedan par zadovoljava: $\frac{54}{63} = \frac{6}{7}$
- par $\frac{56}{72}, \frac{64}{72}$, dva se mogu kratiti: $\frac{60}{72} = \frac{5}{6}$ i $\frac{63}{72} = \frac{7}{8}$

Traženi razlomci: $\frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}$.

13. Učenik je pročitao knjigu za tri dana. Prvog dana je pročitao $\frac{3}{8}$ knjige, drugog dana $\frac{5}{12}$ knjige, a trećeg dana $\frac{1}{6}$ knjige i još 10 stranica. Koliko je stranica imala knjiga?
Rješenje:

Učenik je za tri dana pročitao: $\frac{1}{3}+\frac{5}{12}+\frac{1}{6}=\frac{9}{24}+\frac{10}{24}+\frac{4}{24}=\frac{23}{24}$ dijela knjige, bez posljednjih stranica. Proizilazi da je upravo $\frac{1}{24}$ knjige tih 10 stranica. Dakle, knjiga ima 240 stranica.

14. Odredite razlomku $\frac{3}{5}$ jednak razlomak u kome je zbir brojnika i nazivnika 56.
Rješenje:

$3x+5x=56 \Rightarrow x=7\ \frac{3}{5}=\frac{21}{35}$

15. 15% nekog broja daje broj 1800. Koji je to broj?
Rješenje:

$\frac{15}{100}\cdot x=1800 \Rightarrow x=12000$

16. Odredi sve četvorocifrene brojeve oblika $\overline{abba}$ djeljive sa 45.
Rješenje:

a može biti samo 5, zbog toga b može biti samo 4, pa je jedino rješenje 5445

17. Sam lav može pojesti ovcu za 2 sata, vuk za 3 sata, a pas za 6 sati. Za koje vrijeme bi oni zajedno pojeli ovcu?
Rješenje:

$\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}x=1 \Rightarrow x=1$

18. Kojim brojem moramo pomnoziti zbir brojeva $3\frac{1}{2}$ i $2\frac{1}{3}$ da bismo dobili raziku tih brojeva.
Rješenje:

$$x\left(\frac{7}{2}+\frac{7}{3}\right)=\frac{7}{2}-\ \frac{7}{3}$$
$$x\cdot\frac{35}{6}=\frac{7}{6} \Rightarrow\ x=\frac{7}{6}:\frac{35}{6} \Rightarrow x=\frac{7}{6}\cdot\frac{6}{35} \Rightarrow x=\frac{1}{5}$$

19. Na školskom takmičenju iz matematike učestvovala je $\frac{1}{3}$ učenika jednog odjeljenja od kojih na općinsko takmičenje nije se plasiralo 8 učenika, tako da je na općinskom takmičenju učestvovala $\frac{1}{9}$ učenika tog odjeljenja. Koliko učenika ima u tom odjeljenju?
Rješenje:

I način
Pošto je $\frac{1}{3}$ isto što i $\frac{3}{9}$ učenika jednog odjeljenja učestvovalo na školskom takmičenju. Kako je na općinskom takmičenju učestvovala $\frac{1}{9}$ učenika, znači $\frac{3}{9}-\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$ učenika istog odjeljenja nije plasirano tj. 8 učenika.
Ako $\frac{2}{9}$ učenika jednog odjeljenja je 8 učenika, znači da je $\frac{1}{9}$ učenika toga odjeljenja 4 učenika.
U odjeljenju je $4 \cdot 9 = 36$ učenika.

II način
Ako je x –broj učenika odjeljenja.
$$\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x=8 \Rightarrow x=3$$
U odjeljenju je 36 učenika.

20. Bez dijeljenja i bez dovođenja na zajednički imenilac razlomaka $\frac{599}{799}$ i $\frac{5999}{7999}$ utvrditi koji je od datih razlomaka veći.
Rješenje:

$$1-\frac{599}{799}=\frac{200}{799}=\frac{2000}{7990}$$

$$1-\frac{5999}{7999}=\frac{2000}{7999}$$

Dopuna do jedinice prvog razlomka je veća, pa je $\frac{599}{799}<\frac{5999}{7999}$.

21. Neko potroši najprije $\frac{3}{5}$ novca koji je imao, zatim $\frac{5}{9}$ ostatka, potom još $\frac{3}{8}$ novog ostatka. Poslije toga mu je ostalo još $200KM$. Koliko je novca imao na početku?
Rješenje:

$1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$, dakle ostatak je $\frac{2}{5}$. Zatim potroši $\frac{5}{9}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{9}$ cijele sume, pa je novi ostatak$1-\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{9}\right)=\frac{8}{45}$ od cijele sume. Od toga potroši $\frac{3}{8}$ ili $\frac{3}{8}\cdot\frac{8}{45}=\frac{1}{15}$ cijele sume. Ukupno je potrošio

$\frac{37}{45}+\frac{1}{15}=\frac{8}{9}$, tj. ostala je $\frac{1}{9}$ cijele sume, što iznosi $200KM$. Dakle, ukupna suma je iznosila $1800KM$.

22. Tri domaćice kupe izvjestan broj jaja manji od 100. Prva domaćica uzme trećinu svih jaja, druga domaćica uzme trećinu ostatka, a zatim treća domaćica uzme trećinu preostalih jaja. Jaja koja su preostala poslij toga domaćice su međusobno podijelile na jednake dijelove. Koliko je bilo jaja? Koliko je uzela svaka domaćica?

Rješenje:

Prva domaćica je uzela $\frac{1}{3}$, druga $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$ $\left(\text{ostatak jaja: } 1-\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{9}\right)=\frac{4}{9}\right)$, treća $\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}=\frac{4}{27}$. Ostalo je $\frac{8}{27}$ što je djeljivo sa 3, pa je svaka dobila po $\frac{8}{81}$ ostatka, što znači da je bilo ukupno 81 jaje, pa je prva domaćica uzela 35, druga 26 i treća 20 jaja.

23. Odredi $n \in N$ ako je $\frac{\mathrm{n}+8}{\mathrm{n}-2}$ prirodan broj.

Rješenje:

$$\frac{\mathrm{n}+8}{\mathrm{n}-2}=\frac{\mathrm{n}-2+10}{\mathrm{n}-2}=\frac{\mathrm{n}-2}{\mathrm{n}-2}+\frac{10}{\mathrm{n}-2}=1+\frac{10}{\mathrm{n}-2}$$

$\frac{10}{\mathrm{n}-2}$ je pririrpdan broj ako mu nazivnik $n-2 \in \{1,2,5,10\}$. Sada je:

$n-2=1$ pa je $n=3$

$n-2=2$ pa je $n=4$

$n-2=5$ pa je $n=7$

$n-2=10$ pa je $n=12$

Dakle, n može biti: $3,4,7$ i 2

24. Odredi $n \in N$ ako je $\frac{3\mathrm{n}+5}{\mathrm{n}-3}$ prirodan broj.

Rješenje:

$n_1=4, n_2=5, n_3=10$ i $n_4=17$

25. Riješi jednadžbu $\frac{1}{5}(2+x)+30(4+x)=98(8-x)-\frac{3(5x-1)}{14}$

Rješenje:

$$\frac{1}{5}(2+x)+30(4+x)=98(8-x)-\frac{3(5x-1)}{14} \Rightarrow x=\frac{46467}{9049}=5\frac{1222}{9049}$$

26. Odredi sve vrijednosti prirodnog broja n tako da je tačna nejednakost $\frac{1}{3} \leq \frac{n}{6} < \frac{3}{4}$.

Rješenje:

$$\frac{1}{3} \leq \frac{n}{6} < \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{4}{12} \leq \frac{2n}{12} < \frac{9}{12} \Rightarrow 4 \leq 2n < 9 \Rightarrow n \in \{2, 3, 4\}$$

Zadaci za sedmi razred

Cijeli brojevi

Racionalni brojevi

Trougao

Diofant[4] *u skladu sa tadašnjim razvjem matematike je pod pojmom broj podrazumijevao samo cijele pozitivne brojeve. Za njega je jednadžba* $4x + 20 = 0$ *bila besmislena jer je rješenje negativan broj. On pozitivne brojeve naziva* ***brojevi za sabiranje (sabirajući brojevi)****, a negativne* ***brojevi za oduzimanje (oduzimajući brojevi)*** *i navodi pravila za njihovo množenje:*

Broj za oduzimanje pomnožen sa brojem sa oduzimanjem daje broj za sabiranje.

Broj za oduzimanje pomnožen sa brojem za sabiranje daje broj za oduzimanje.

Brahmagupta[5] *pozitivne brojeve predstavlja kao imetak, a negativne brojeve kao dug te navodi pravila za sabiranje:*

Zbir dva imetka je imetak, dva duga je dug, imetka i duga njihova razlika, a ako su jednaki nula. Zbir nule i duga je dug, imetka i nule imetak, a dvije nule je nula.

Bhaskara[6] *negativan broj označava tako da iznad njega stavlja tačku. On je dao pravila za množenje i dijeljenje negativnih brojeva:*

Proizvod dva imetka ili dva duga je imetak, proizvod imetka i duga je dug, a isto tako je i u dijeljenju.

---

[4] Diofant (starogrčki Διόφαντος ὁ Ἀλεξανδρεύς) je bio starogrčki matematičar, živio je oko 250. godine nove ere. Njegov rad je sačuvan u šest sačuvanih (sedam dijelova je izgubljeno) poglavlja djela *„Aritmetika“* koji je bila najstarije sistematsko djelo o algebri. Dao je veliki doprinos u napretku algebre upotrebom simbola za veličine i matematičke operacije i odnose koje su se prije Diofanta opisivale riječima.

[5] Brahmagupta je bio indijski matematičar i astronom koji je živio u periodu od 589. do 668. godine. Sabiranje, oduzimanje, dijeljenje i druge fundamentalne operacije sa arapskim brojevima prvi puta se pojavljuju u njegovom djelu *„Bramasputa Sidanta“.“Bramaguptasidanta“* je najstariji poznati tekst koji nulu tretira kao broj po sebi. U ovom djelu se navode i pravila za aritmetiku sa negativnim brojevima i nulom, koja su vrlo blizu današnjih shvatanja.

[6] Bhaskara bio je indijski matematičar i astronom koji je živio u periodu od 1114. do 1185. godine. Njegovo djelo *„Bijaganita“(„Algebra“)* koje je sačinjeno od 12 dijelova je jedno od najznačajnijih djela u kojem se prvi puta spominje da kvadratni korijen ima dva znaka, kao i mnoga pravila vezana za skup cijelih brojeva.

Cijeli brojevi

1. Cifra jedinica nekog broja je 0. Ako je izbrišemo tada se taj broj smanji za 37215. Koji je to broj?

Rješenje:
Ako se u nekom broju izbriše zadnja cifra nula onda se on smanji deset puta. Naka je traženi broj xAko u njemu izbrišemo posljednju cifru dobijamo broj $\frac{x}{10}$. Sada imamo jednačinu po tekstu zadatka: $\frac{x}{10} + 37215 = x \implies x = 41350$. Traženi broj je 41350.

2. Izračunati zbir i proizvod 20 uzastopnih cijelih brojeva ako je među njima 8 pozitivnih.
Rješenje:

Radi se o slijedećim brojevima: $8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10, -11$. Odmah je očito da je njihov proizvod jednak broju 0, jer jedan faktor je nula. Zbir ovih nabrojanih brojeva iznosi:$-9 - 10 - 11 = -30$, jer je zbir suprotnih brojeva 0.

3. Dokazati da je $\frac{10^n+8}{18}$ prirodan broj.
Rješenje:

Treba pokazati da je dati broj djeljiv sa 18, tj da je djeljiv i sa 2 i sa 9. Broj $10^n = \overbrace{10000\ldots0}^{n}$ pa je broj $10^n = 10^n + 8 = \overbrace{10000\ldots0}^{n-1}8$ odakle zaključujemo da mu je posljednja cifra 8 pa je taj broj djeljiv sa 2. Zbir cifara našeg broja je također djeljiv sa 9 odakle zaključujemo da i dat broj djeljiv sa 9. Samim tim djeljiv je i sa 18, pa je broj $\frac{10^n+8}{18}$ prirodan.

4. U skupu cijelih brojeva riješi jednadžbu $xy - 3x + y = 5$.
Rješenje:

U jednadžbi $xy - 3x + y = 5$ izrazimo jednu nepoznanicu pomoću druge, tj. $y = \frac{5+3x}{x+1}$.
Dalje je lako uočiti da će y biti cijeli broj samo ako je $x + 1$ djelitelj broja 2. Dakle, $x + 1$ može biti $1, -1, 2, -2$. To znači da x može biti $0, -2, 1, -3$. Slijedi da su rješenja $(0, 5)$, $(-2, 1)$, $(1, 4)$, $(-3, 2)$.

5. Brat je 4 puta stariji od sestre, a sestra je 9 godina mlađa od brata. Koliko godina ima sestra, a koliko brat?
Rješenje:

Ako sestra ima n, brat ima $4n$ godina i vrijedi $4n - n = 9$, otkud slijedi $n = 3$. Sestra ima 3, a brat 12 godina.

6. Odredi sve cijele brojeve x za koje je $\frac{2x+35}{x}$ također cijeli broj.
Rješenje:

$$\frac{2x+35}{x} = \frac{2x}{x} + \frac{35}{x} = 2 + \frac{35}{x} \Longrightarrow x \in \{-35, -7, -5, -1, 1, 5, 7, 35\}$$

7. Dat je skup $A = \{x \in \mathbb{Z} |\ 2 \leq |x| \leq 5\ \}$. Odrediti maksimalnu razliku dva broja iz skupa A.
Rješenje:

$2 \leq |x| \leq 5 \Leftrightarrow (-5 \leq x \leq -2\ \vee\ 2 \leq x \leq 5) x \in \{-5, -4, -3, -2, 2, 3, 4, 5\}$
Dakle, $A = \{-5, -4, -3, -2, 2, 3, 4, 5\}$. Maksimalna razlika se dobije oduzimanjem od najvećeg najmanji element skupa A, tj. $5 - (-5) = 10$.

8. Školskoj biblioteci svaki od 10 učenika je poklonio po nekoliko knjiga što ukupno iznosi 56 knjiga. Najviše 10 knjiga je poklonila Lejla. Dokazati da su bar tri učenika poklonila isti broj knjiga.
Rješenje:

Preostalih 9 učenika su poklonili ukupno 46 knjiga. Ako bi svih 9 poklonili različit broj knjiga onda bi taj zbir iznosio $1 + 2 + 3 + \cdots + 9 = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$ knjiga. Kako su oni poklonili 46, bar 2 učenika su poklonila isti broj knjiga.

9. Ali je ušao u četiri trgovine. U svakoj trgovini je trošio polovinu sume i na izlazu ubacivao po $1KM$ za Narodnu kuhinju. Kada je izašao iz četvrte trgovine ostao je bez ijednog KM. Sa koliko KM je ušao u prvu trgovinu?
Rješenje:

U četvrtu trgovinu je ušao sa $2KM(1KM$ potrošio i $1KM$ dao za Narodnu kuhinju).
U treću trgovinu je ušao sa $6KM$ $(3KM$ potrošio i $1KM$ dao za Narodnu kuhinju)
U drugu trgovinu je ušao sa $14KM$ i u prvu je ušao sa $30KM$.

10. Za koji prost broj p je vrijednost razlomka $\frac{2p-24}{13-p}$ cjelobrojana? Kolika je ta cjelobrojna vrijednost razlomka?
Rješenje:

$$\frac{2p-24}{13-p} = \frac{2p-24}{-p+13} = \frac{-2 \cdot (-p+13) + 2}{-p+13} = -2 + \frac{2}{-p+13}$$
Da bi dati razlomak bio cjelobrojan mora biti $(-p + 13) \in \{-2, -1, 1, 2\}$, odnosno $-p \in \{-15, -14, -12, -11\}$, odnosno $p \in \{11, 12, 14, 15\}$. Kako je p prost broj,
$$p = 11 \Rightarrow \frac{2p-24}{-p+13} = \frac{2 \cdot 11 - 24}{-11+13} = \frac{-2}{2} = -1 \in Z$$

11. Odredi sve cijele brojeve b za koje je $\frac{5b-7}{b-2}$ također cijeli broj.
Rješenje:

$$\frac{5b-7}{b-2} = \frac{5(b-2)+3}{b-2} = 5 + \frac{3}{b-2}$$

$b-2$ mora biti djeljitelj broja 3, pa $b \in \{-1, 1, 3, 5\}$

12. Odredi zbir cjelobrojnih rješenja nejednačine $|x-1| < 6$.
Rješenje:

Data nejednačina je ekvivalentna sa $-6 < x - 1 < 6$, odnosno sa $-5 < x < 7$. Prema tome, cjelobrojna rješenja nejednačine su -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 i 6, a njihov zbir je 11 .

13. Izračunaj vrijednost izraza

$$2000x - 2001x + 2002x - 2003x + 2004x - 2005x + 2006x - 2007x$$

ako je x negativno rješenje jednačine $|x| = 2008$.
Rješenje:

$x = -2008$, pa je vrijednost izraza 8032.

14. Odredi sve parove cijelih brojeva x i y za koje vrijedi $x^2 \cdot |y| = 2009$.
Rješenje:

Rastavljanja broja 2009 su $2009 = 49 \cdot 41 = 7 \cdot 287 = 1 \cdot 2009$. Kako nijedan od brojeva 7 i 287 nije kvadrat nekog cijelog broja, dobijamo da je $x^2 = 49$ i $|y| = 41$ ili $x^2 = 1$ i $|y| = 2009$. Dakle, sva rješenja su: $(x, y) \in \{(7, 41), (7, -41), (-7, 41), (-7, -41),$ $(1, 2009), (1, -2009), (-1, 2009), (-1, -2009)\}$.

15. Majka i kćerka su rođene u istom vijeku. Koliko godina je majka starija od kćerke ako je danas proizvod njihovih godina 2010 ?
Rješenje:

Kako je $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$ i kako su majka i kćerka rođene u istom vijeku, to je jedino moguće da majka ima 67 godina, a kćerka $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ godina.

16. Dati su skupovi $A = \{-5, -4, -2, 1, 3\}$ i $B = \{-3, -1, 0, 2\}$. Odredi elemente skupa $C = \{c | c = |a + b|, a \in A, b \in B\}$.
Rješenje:

Uzimajući redom vrijednosti za a i b iz skupova A i B, i računajući vrijednost izraza $|a + b|$, dobivamo elemente skupa $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

17. Odredi cijele brojeve a, b i prost broj p takve da je $|a \cdot b| \cdot p = 4022$.
Rješenje:

Ako je $p = 2$, tada je moguće naći 8 rješenja, četiri za $a \in \{-2011, 2011\}$ i $b \in \{-1, 1\}$ i četiri za $a \in \{-1, 1\}$ i $b \in \{-2011, 2011\}$. Ako je $p = 2011$, tada je moguće naći još 8 rješenja, četiri za $a \in \{-1, 1\}$ i $b \in \{-2, 2\}$ i četiri za $a \in \{-2, 2\}$ i $b \in (-1, 1)$.

18. Odrediti $n \in \mathbb{Z}$ ako je $\frac{5n+26}{n+1}$ cijeli broj.
Rješenje:

$$\frac{5n+26}{n+1} = \frac{5n+5+21}{n+1} = \frac{5(n+1)+21}{n+1} = \frac{5(n+1)}{n+1} + \frac{21}{n+1} = 5 + \frac{21}{n+1}$$

Da bi razlomak $\frac{21}{n+1}$ bio cijeli broj njegov brojnik mora biti djeljiv sa nazivnikom, a da bi to vrijedilo parametar n mora da ima slijedeće vrijednosti $n \in \{-8, -4, 0, 2, 6\}$

19. Neka je $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \middle| \frac{7}{2x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$ i $B = \{y \in \mathbb{Z} | |3y + 1| \leq 10\}$. Odrediti:

a) elemente skupova A i B;

b) maksimalnu vrijednost broja $w = x + y$, pri čemu je $x \in A$ i $y \in B$.

Rješenje:

a)

Da bi razlomak $\frac{7}{2x+1}$ bio cijeli broj njegov brojnik mora biti djeljiv sa nazivnikom, a da bi to vrijedilo parametar x mora da ima slijedeće vrijednosti $x \in \{-4, 0, 3\}$ jer je npr.

$$\frac{7}{2 \cdot (-4) + 1} = \frac{7}{-7} = -1 \in \mathbb{Z}$$

$A = \{-4, 0, 3\}$

– da bi nejednakost $|3y + 1| \leq 10$ bila tačna parametar y mora da ima slijedeće vrijednosti $y \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ jer je npr. $|3 \cdot (-3) + 1| = |-9 + 1| = |-8| = 8 \leq 10$

$$B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

b)
Da bi broj w imao maksimalnu vrijednost to parametri x i y moraju imati maksimalne vrijednosti iz skupova kojima pripadaju tj. $x = 3$, $y = 3$, pa je $w_{max} = 3 + 3 = 6$

20. Rep ribe ima $4kg$. Glava onoliko koliko rep i pola trupa, a trup onoliko koliko i rep zajedno. Koliko kilograma ima cijela riba?
Rješenje:

$Glava\ =\ pola\,trupa\ +\ 4kg$
$Trup\ =\ glava\ +\ 4\,kg$
$Trup\ =\ pola\,trupa\ +\ 4k\ +\ 4kg$
$Trup\ =\ pola\,trupa\ +\ 8kg$
$T = \frac{1}{2}t + 8/\cdot 2$
$2t\ =\ t\ +\ 16$
$T\ =\ 16\,kg$

$Glava\ =\ pola\,trupa\ +\ 4kg\ =\ 8\ +\ 4\ =\ 12\,kg$
$Cijela\,riba\ =\ trup\ +\ glava\ +\ rep\ =\ 16\ +\ 12\ +\ 4\ =\ 32\,kg$

Cijela riba ima $32\ kg$.

21. Za koje sve prirodne brojeve a razlomak $\frac{a+89}{a-2}$ je prirodan broj?
Rješenje:

$$\frac{a+89}{a-2} = \frac{a-2+2+89}{a-2} = \frac{a-2}{a-2} + \frac{91}{a-2} = 1 + \frac{91}{a-2}$$
Kako je $91 = 7 \cdot 13$ imamo četiri mogućnosti
1) $a - 2 = 1$ pa je $a = 3$
2) $a - 2 = 7$ pa je $a = 9$
3) $a - 2 = 13$ pa je $a = 15$
4) $a - 2 = 91$ pa je $a = 93$.

22. Na jednoj ekskurziji 60 učenika sedmog razreda smješteno je u nekom hotelu tako da su djevojčice smještene u trokrevetne, a dječaci u četverokrevetne sobe. Koliko je bilo djevojčica, a koliko dječaka ako je upotrebljena jedna četverokrevetna soba više nego trokrevetnih i sve su sobe bile pune?
Rješenje:

Sa n označimo broj trokrevetnih soba, a $n + 1$ broj četverokrevetnih soba. U n trokrevetnih soba bilo je $3 \cdot n$ djevojčica, a u $n + 1$ četverokrevetnih soba $4 \cdot (n + 1)$ dječaka. Ukupno ih je bilo:
$3n + 4(n + 1) = 60$, otkud dobivamo $n = 8$. Dakle, bile su 24 djevojčice i 36 dječaka.

23. Četiri učenika sedmog razreda: Ivan, Jasmin, Mirza i Marko skupljali su stare boce. Ivan i Jasmin skupili su jednaki broj boca. Mirza je skupio dva puta više od Ivana, a Marko je skupio 3 puta više od Mirze. Koliko je boca skupio svaki učenik ako su sva četvorica skupila ukupno 150 boca?

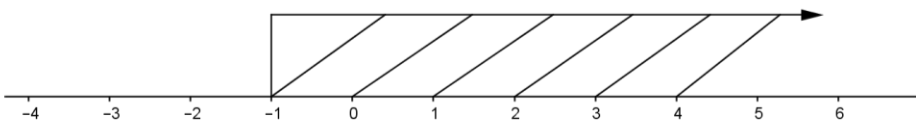
Rješenje:

Ako je Ivan skupio n boca, Jasmin ih je također skupio n, Mirza $2n$, a Marko $6n$. Ukupno su ih skupili: $n+n+2n+6n=150$, pa je $n=15$. Dakle, Ivan je skupio 15, Jasmin također 15, Mirza 30, a Marko 90 boca.

24. Za koje vrijednosti promjenljive je izraz $-7(-2-3x)$ veći od količnika brojeva -49 i 7?

Rješenje:

$-7(-2-3x) > -49:7$
$-7(-2-3x) > -7$
$-2-3x < (-7):(-7)$
$-2-3x < 1$
$-3x < 1+2$
$-3x < 3$
$x > 3:(-3)$
$x > -1$



$x \in (-1,+\infty)$

25. Popuni nepoznata polja magičnog kvadrata tako da zbirovi u svim vrstama, kolonama i dijagonalama budu jednaki.

-11	**x**	-9
y	-3	**z**
t	**w**	**Q**

Rješenje:

-11	$\mathbf{11}$	-9
$\mathbf{-1}$	-3	$\mathbf{-5}$
$\mathbf{3}$	$\mathbf{-17}$	$\mathbf{5}$

26. Izračunaj razliku zbira svih neparnih i zbira svih parnih prirodnih brojeva manjih od 2007.
Rješenje:

$(1+3+5+\cdots+2003+2005)-(2+4++6+\cdots+2004+2006)=$
$=(1-2)+(3-4)+(5-6)+\cdots+(2003-2004)+(2005-2006)=$
$=-1-1-1-\cdots-1-1=-1003$

27. Odredi sve cijele brojeve n koji zadovoljavaju dvostruku nejednakost $\frac{4}{5}<\frac{1-n}{15}<1$.
Rješenje:

$\frac{12}{15}<\frac{1-n}{15}<\frac{15}{15} \Rightarrow\ 12<1=n<15\ \Rightarrow\ 11<-n<14 \Rightarrow\ -14<n<-11$
$\Rightarrow n\in\{-13,-12\}$

28. Zbir pet uzastopnih prirodnih brojeva je 1375. Nađi te brojeve.
Rješenje:

$n-2+n-1+n+n+1+n+2=1375\ \Rightarrow 5n=1375\ \Rightarrow n=275$
Traženi brojevi su $273, 274, 275, 276$ i 277.

29. Zbir dva broja je 47. Ako prvi broj podijelimo sa drugim dobije se količnik 2 i ostatak 5. Naći te brojeve.
Rješenje:

$a+b=47$
$a{:}\,b=2(-5)$
$a=2b+5$
$47-b=2b+5$
$47-5=3b$
$3b=42$
$b=14$
$a=47-14$
$a=33$

30. Ako neki broj oduzimaš od proizvoda brojeva -3 i -12 dobiješ količnik brojeva -54 i 6. Koji je to broj?

Rješenje:

$$-3 \cdot (-12) - x = \frac{-54}{6} \Rightarrow x = 45$$

31. Odredi sve cjelobrojene vrijednosti x za koje je vrijednost razlomka $\frac{2x+7}{x-4}$ cio broj

Rješenje:

$x \in \{-11, -1, 1, 3, 5, 7, 9, 19\}$

32. Odredi sve cijele vrijednosti broja x za koje je izraz $A = \frac{3x-7}{x+4}$ cio broj. Odredi odgovarajuće cijele vrijednosti izraza.

Rješenje:

$x \in \{-23, -5, -3, 15\}$, $A \in \{-16, 2, 4, 22\}$

33. Za koje prirodne brojeve n će izraz $\frac{3n+5}{n-3}$ biti prirodan broj?

Rješenje:

$n \in \{4,5, 10,17\}$

34. Odredi cjelobrojnu vrijednost razlomka $C = \frac{2p-14}{p-4}$, p je cio broj, tj. $p \in \mathbb{Z}$

Rješenje:

$A \in \{-4, -3, -1, 0, 1, 4, 5, 8\}$

35. Odredi sve cijele brojeve b za koje je $\frac{5b-7}{b-2}$ takođe cio broj.

Rješenje:

$b \in \{-1,1,3,5\}$

36. Odredi $a \in \mathbb{Z}$ ako je $\frac{a+9}{a+6}$ cijeli broj.

Rješenje:

$a \in \{-9, -7, -5, -3, \}$

37. Odredi $a \in \mathbb{Z}$ ako je $\frac{3a+29}{a+2}$ cijeli broj.

Rješenje:

$a \in \{-25, -3, -1, 21\}$

38. Ako broj 1000 podijelimo nekim brojem ostatak je 8, a ako broj 900 podijelimo istim brojem ostatak je 1. Koliki količnik je u prvom, a koliki u drugom dijeljenju?

Rješenje:

Neka je djelilac u oba slučaja bio broj x. Tada je $100 = a \cdot x + 8$, a $900 = b \cdot x + 1$.
Tada je $a \cdot x = 992 = 31 \cdot 32 \ \ i \ \ b \cdot x = 899 = 31 \cdot 29$.
Kako su 32 i 29 uzajamno prosti brojevi, očigledno je djelilac $x = 31$, a traženi količnici su $a = 32 \ \ i \ \ b = 29$.

39. Dati su skupovi $A = \{1,2, \dots ,1993\} \ \ i \ \ B = \{0, -1, -2, \dots , -1992\}$.
Neka je c zbir svih brojeva skupova $A \ i \ B, d$ njihov proizvod i e razlika sume neparnih brojeva iz A i parnih brojeva iz B. Poredati brojeve $|c - d|, |d - e| \ i \ |e - c|$ po veličini.

Rješenje:

$$c = 1 + 2 + \cdots + 1993 + 0 + (-1) + (-2) + \cdots + (-1992) = 1993$$
$$d = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 1993 \cdot 0 \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot \dots \cdot (-1992) = 0$$
$$e = (1 + 3 + 5 + \cdots + 1993) - ((-2) + (-4) + \cdots + (-1992))$$
$$e = 1 + 3 + 5 + \cdots + 1993 + 2 + 4 + \cdots + 1992 = 997 \cdot 1993$$
Prema tome, $|c - d| = 1993, |d - e| = 997 \cdot 1993, |e - c| = 996 \cdot 1993$, pa je
$$|c - d| < |e - c| < \ |d - e|.$$

40. Zbir pet uzastopnih cijelih brojeva je -40. Koji su to brojevi?

Rješenje:

Traženi brojevi su: $\ -6, -7, -8, -9, -10$.

41. U skupu cijelih brojeva riješiti jednačinu

$$(x-5)(x-4)(x-3)=-120.$$

Rješenje:

Kako je $-120=(-6)\cdot(-5)\cdot(-4)$, to je $x-5=-6$, odnosno $x=-1$.

42. U jednoj školi ima 800 učenika. Dokazati da barem tri učenika imaju rođendan istog datuma.

Rješenje:

Rasporedimo učenike u 366 grupa, pri čemu istoj grupi pripadaju oni učenici koji slave rođendan istog datuma. Kako je $800=366\cdot 2+68$, barem jedna grupa sadrži barem 3 učenika. Oni imaju rođendan istog datuma.

Racionalni brojevi

1. Zamislio sam broj od njeg oduzeo 1.05, razliku sam pomnožio sa 0.8, proizvodu sam dodao 2.84 i dobijenu sumu podijelio sam brojem 0.01 i tako sam dobio 700. Koji broj sam zamislio?
Rješenje:

Jedan od načina da se ovaj zadata riješi je taj da se krene računati s kraja izvršavajući suprotne računske radnje od navedenih. Imamo:
$700 \cdot 0.01 = 7$
$7 - 2.84 = 4.16$
$4.16 : 0.8 = 5.2$
$5.2 + 1.05 = 6.25$
Traženi broj je 6.25.

Zadatak se mogao riješiti i postavljanjem linearne jednačine po tekstu zadatka.

2. Razlika dva racionalna broja je -13.86. Ako se umanjeniku pomjeri decimalan zarez za jedno mjesto ulijevo dobije se umanjilac. O kojim brojevima je riječ?
Rješenje:

Naka je umanjenik $10x$, onda je umanjilac x. Njihova razlika je $9x$ tj. broj -13.86, odavde dobijamo da je $x = -13.86 : 9 \implies x = -1.54$. Dakle, umanjilac je -1.54 a umanjenik -15.4.

3. Razlika $\frac{7}{9}$ jednog i $\frac{7}{9}$ drugog broja je $\frac{3}{7}$. Koliko iznosi razlika $\frac{3}{4}$ drugog i $\frac{3}{4}$ prvog broja?
Rješenje:

Neka su x i y traženi brojevi. Tada je:
$$\frac{7}{9}x - \frac{7}{9}y = \frac{7}{9}(x - y) = \frac{3}{7}$$
tj.
$$x - y = \frac{27}{49}$$
Slijedi da je:
$$\frac{3}{4}y - \frac{3}{4}x = -\frac{3}{4}(x - y) = -\frac{3}{4} \cdot \frac{27}{49} = -\frac{81}{196}$$

4. Izračunati $3.5-\left\{3+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 0.2:\left[-1-\frac{0.8}{0.1}\cdot\left(-\frac{1}{10}\right)\right]\right\}=.$
Rješenje:

$$3.5-\left\{3+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 0.2:\left[-1-\frac{0.8}{0.1}\cdot\left(-\frac{1}{10}\right)\right]\right\}=0$$

5. Riješiti jednačinu $2\frac{2}{3}:\left[x-\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{2.5-7:3.5}{8\cdot 0.125}-1.5\right)\right]=\frac{2}{3}.$
Rješenje:

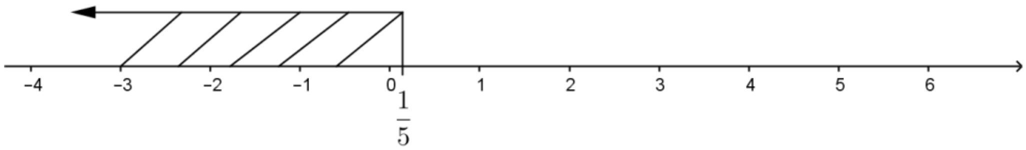
$$2\frac{2}{3}:\left[x-\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{2.5-7:3.5}{8\cdot 0.125}-1.5\right)\right]=\frac{2}{3}\Leftrightarrow x=3\frac{2}{5}$$

6. Izračunati $1\frac{3}{8}-\left[125\cdot 0.01-\frac{1}{4}\left(1\frac{1}{2}-0.75\right)\right]=.$
Rješenje:

$$1\frac{3}{8}-\left[125\cdot 0.01-\frac{1}{4}\left(1\frac{1}{2}-0.75\right)\right]=\frac{5}{6}$$

7. Riješiti nejednačinu $\left(\frac{1}{2}x+0.2\right)\cdot 1\frac{1}{4}<\frac{1-0.2\cdot\frac{5}{4}}{2}.$
Rješenje:

$$\left(\frac{1}{2}x+0.2\right)\cdot 1\frac{1}{4}<\frac{1-0.2\cdot\frac{5}{4}}{2}\Leftrightarrow x<\frac{1}{5}$$



$$x\in\left(-\infty,\frac{1}{5}\right)$$

8. Biciklista je putovao 4 dana. Prvog dana je prešao $\frac{4}{13}$ ukupnog puta. Drugi dan $\frac{4}{15}$ ostatka puta. Treći dan prešao je $\frac{5}{11}$ ostatka puta nakon drugog dana. Posljednji dan prešao je preostali dio puta od $54km$. Koliki je put prešao za ta 4 dana?
Rješenje:

Neka je dužina puta$x$. Prvi dan biciklista je prešao $\frac{4}{13}x$puta, drugi dan $\frac{12}{65}x$ puta, a treći dan $\frac{4}{13}+\frac{12}{65}=\frac{32}{65},\frac{5}{11}\cdot\frac{32}{65}x=\frac{3}{13}x$ puta.
Sad imamo jednačinu $\frac{4}{13}x+\frac{12}{65}x+\frac{3}{13}x+54=x\ \Rightarrow x=195$
Za 4 dana prešao je put od $195km$.

9. Damir je za svoj posao trebao da dobije 138 KM i loptu. Međutim, Damir je uradio samo trećinu posla i za to dobio 10 KM i loptu. Koliko košta lopta?
Rješenje:

Možemo na osnovu teksta zaključiti da $\frac{2}{3}$ posla košta $128KM$, odnosno $\frac{1}{3}$posla košta $64KM.$ Međutim, Damir je za trećinu posla dobio 10 KM i loptu, pa imamo da lopta košta $64-10=54\ KM.$

10. Poredaj po veličini brojeve a, b i c od najmanjeg do najvećeg ako je

$a=\left(1\frac{1}{8}-0.9\right):\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{5}\right)\quad b=\frac{-\frac{1}{3}-\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{6}\right)}{2-\frac{3}{5}}\quad c=\frac{3}{8}+1\frac{5}{9}\left(\frac{5}{7}-1\frac{1}{4}\right).$

Rješenje:

Dobijamo $a<b<c$ jer je $a=-\frac{18}{24}, b=-\frac{15}{24}, c=-\frac{11}{24}.$

11. Na svakih 7 dječaka u jednoj školi dolazi 8 djevojčica, a na svakih 9 dječaka dolazi jedan učitelj. Ako je u školi ukupno 675 učenika, koliko je učitelja ?
Rješenje:

U školi ima $675:(7+8)=45$ grupa sa 7 dječaka i 8 djevojčica. Dječaka ima $45\cdot 7=315$, a učitelja $315:\ 9=35.$

12. Izračunati vrijednost izraza $\frac{3\frac{1}{2}\left(1\frac{2}{3}-4.2\right)\cdot 2.25+4}{\frac{3}{4}\left(4\frac{1}{2}-2\frac{3}{4}\right)-\left(5\frac{2}{3}:3\frac{7}{9}\right)}=$

Rješenje:

$$\frac{3\frac{1}{2}\left(1\frac{2}{3}-4.2\right)\cdot 2.25+4}{\frac{3}{4}\left(4\frac{1}{2}-2\frac{3}{4}\right)-\left(5\frac{2}{3}:3\frac{7}{9}\right)}=-18$$

13. Riješi nejednačinu $\frac{1}{6}-1\frac{1}{2}\cdot\left(x-\frac{5}{6}\right)<\frac{1\frac{3}{4}-2}{0{,}3-\frac{3}{5}}.$

Rješenje:

$$x\in\left(\frac{7}{18},+\infty\right)$$

14. Odredi sve racionalne brojeve koji zadovoljavaju nejednačinu $\frac{3x-2}{x+1} < 0$.

Rješenje:

Svodi se na dva slučaja:

1. slučaj

$x+1>0 \Rightarrow x>-1$

$\frac{3x-2}{x+1} < 0 \ /\cdot (x+1)$

$3x-2<0$

$x<\frac{2}{3}$

Rješenje $-1<x<\frac{2}{3}$

2. Slučaj

$x+1>0 \Rightarrow x>-1$

$\frac{3x-2}{x+1} < 0 \ /\cdot (x+1)$

$3x-2>0$

$x>\frac{2}{3}$ što je nemoguće jer je $x<-1$

15. Razlomak $\frac{1}{13}$ napisati u decimalnom obliku. Koja se cifra nalazi na hiljaditom decimalnom mjestu?

Rješenje:

$\frac{1}{13} = 1:13 = 0.\dot{0}7692\dot{3}076923\ ...$

$1000 : 6 = 166\ (4)$

166 puta se ponavlja grupa cifara 076923, pošto je ostatak dijeljenja 1000 sa 6 broj 4, na hiljaditom mjestu je četvrta cifra perioda ponavljanja, a to je cifra 9.

16. Ako saberemo dva broja dobićemo treći. Ako saberemo drugi i treći dobićemo četvrti broj itd.. Izračunati zbir prvih šest tako dobivenih brojeva ako se zna da je peti broj 7.25.

Rješenje:

prvi broj a

drugi boj b

treći broj $a+b$

četvrti broj $b+a+b=a+2b$

peti broj $a+b+a+2b=2a+3b=7.25$

šesti broj $a+2b+7.25$

$a+b+a+b+a+2b+7.25+a+2b+7.25=4a+6b+14.5=$

$=2(2a+3b)+14.5=2\cdot 7.25+14.5=14.5+14.5=29$

17. Dva radnika postavljaju parkete. Kada bi radio sam, prvi radnik bi posao završio za 4 dana. Zajedno bi posao završili za 3 dana. Međutim, nakon što su dva dana radili zajedno, prvi se radnik razbolio pa je drugi posao završio sam. Koliko dana je trajalo postavljanje parketa?
Rješenje:

Prvi radnik za 1 dan napravi $\frac{1}{4}$ posla.
Prvi i drugi radnik zajedno za 1 dan naprave $\frac{1}{3}$ posla.
Dakle, drugi radnik za jedan dan napravi $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$ posla.
Nakon dva dana oba radnika napravila su zajedno $\frac{2}{3}$ posla.
Preostalu $\frac{1}{3}$ posla drugi radnik će napraviti za $\frac{1}{3}:\frac{1}{12}=4$ dana.
Postavljanje parketa je trajalo 6 dana.

18. Ako se prirodan broj n podijeli s 12, dobije se ostatak 11, a ako se n podijeli s 18, onda je ostatak 5. Koliki se ostatak dobije ako se n podijeli s 36?
Rješenje:

Vrijedi $n = 12\cdot a+11$, $a\in\mathbb{N}$, pe je $3n = 36\cdot a + 33$.
Isto tako je $n = 18\cdot b + 5$ pa je $2n = 36\cdot b + 10$.
Dalje je $3n-2n=(36\cdot a+33)-(36\cdot b+10)$ i $n=36\cdot a+33-36\cdot b-10$, odnosno $n=36(a-b)+23$ što znači da je traženi ostatak 23.

19. Riješi jednačinu $0.4\left(\frac{2}{3}x-1\right)+\frac{3}{5}=-2\frac{1}{4}:0.9$.

Rješenje:

$$0.4\left(\frac{2}{3}x-1\right)+\frac{3}{5}=-2\frac{1}{4}:0.9 \Leftrightarrow x=-10\frac{1}{8}$$

20. Izletnik je najprije $3\frac{1}{2}$ sata pješačio, a zatim 2.5 sata vozio bicikl i za sve to vrijeme prešao $37.7km$. Brzina kojom je vozio bicikl za $5\,\frac{km}{h}$ veća je od brzine pješačenja. Kolike su jedna i druga brzina?
Rješenje:

x je brzina pješačenja, $x+5$ je brzina vožnje bicikla.
$$\left(3\frac{1}{2}\cdot x\right)+[2.5\cdot(x+5)]=37.7 \Leftrightarrow x=4.2$$
Brzina pješačenja je $4.2\,\frac{km}{h}$, a brzina vožnje bicikla je $9.2\,\frac{km}{h}$.

21. Odrediti neskrativ razlomak koji se neće promijeniti ako brojniku dodamo 5, a nazivniku 7.
Rješenje:

Iz $\frac{a}{b} = \frac{a+5}{b+7}$ slijedi da je $7a = 5b$, odnosno $\frac{a}{b} = \frac{5}{7}$.

22. Napiši skup cijelih brojeva x koji su rješenja nejednačine $\frac{1}{3} < \frac{1-x}{5} < \frac{11}{12}$.
Rješenje:

Iz nejednakosti $\frac{5}{3} < 1 - x < \frac{55}{12}$ slijedi $\frac{2}{3} < -x < \frac{43}{12} \Rightarrow -\frac{43}{12} < x < \frac{8}{12} \Rightarrow x \in \{-1, -2, -3\}$.

23. Ako je $\frac{a}{b} = -3$, izračunaj $-\frac{2}{\frac{a}{b}} + \frac{\frac{b}{a}}{-2}$.
Rješenje:
Sređivanjem dobijamo $\frac{-2}{-3} + \frac{-\frac{1}{3}}{-2} = \frac{5}{6}$.

24. Izaberi četiri broja iz skupa $\left\{-\frac{1}{3}, -\frac{7}{8}, \frac{2}{5}, -\frac{5}{14}, -\frac{4}{7}\right\}$ tako da njihov proizvod bude:
a) najveći;
b) najmanji.
Izračunaj te proizvode .
Rješenje:

a) Proizvod je najveći kada je pozitivan, pa treba izabrati četiri negativna broja. Njihov proizvod je $\frac{5}{84}$.

b) Najmanji proizvod dobivamo kada izaberemo brojeve $-\frac{4}{7}, -\frac{7}{8}, \frac{2}{5}, -\frac{5}{14}$ pa je tada proizvod $-\frac{1}{14}$.

25. Marko i Ahmed su sadili drveće. Pri tome $\frac{1}{3}$ sadnica su bile trešnje, $\frac{3}{8}$ orah, a ostalo jabuke. Koliko najviše jabuka su oni zasadili ako su sadili manje od 360 sadnica?
Rješenje:

$\frac{8}{24}$ ukupnog broja sadnica su trešnje, $\frac{9}{24}$ ukupnog broja sadnica su orasi, pa slijedi da jabuka ima $\frac{7}{24}$ od ukupnog broja sadnica. Najveći broj koji je manji od 360 i djeljiv je sa 24 je 336. Kako je $336 : 24 = 14$, slijedi da je broj sadnica jabuka $14 \cdot 7 = 98$.

26. Izračunaj vrijednost izraza $\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(2-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(3-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(4-\frac{4}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(9-\frac{9}{10}\right):14\frac{2}{5}=$

Rješenje:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(2-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(3-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(4-\frac{4}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(9-\frac{9}{10}\right):14\frac{2}{5}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{16}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{81}{10}:\frac{72}{5}$$

Poslije skraćivanja nazivnika sa odgovarajućim brojnicima (2 sa 4, 3 sa 9, 4 sa 16, itd.), dobijamo $\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{1}\cdot\ldots\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{5}{72}$. Skraćivanjem preostalih brojeva u nazivniku sa istim brojevima u brojniku ostaće nam proizvod $3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\;=\;2520$.

27. Neka je $A=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}$, $B=-5+\frac{1}{2+\frac{2}{3+\frac{1}{2}}}$. Dokazati da je $C=\frac{7}{11}A+18B$ cijeli broj.

Rješenje:

$$A=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{4}{3}}}=1+\frac{1}{1+\frac{3}{4}}=1+\frac{1}{\frac{7}{4}}=1+\frac{4}{7}=\frac{11}{7}$$

$$B=-5+\frac{1}{2+\frac{2}{3+\frac{1}{2}}}=-5+\frac{1}{2+\frac{2}{\frac{7}{2}}}=-5+\frac{1}{2+\frac{4}{7}}=-5+\frac{1}{\frac{18}{7}}=-5+\frac{7}{18}=-\frac{83}{18}$$

$$C=\frac{7}{11}A+18B=\frac{7}{11}\cdot\frac{11}{7}+18\cdot\left(-\frac{83}{18}\right)=1-83=-82\in\mathbb{Z}$$

28. Izračunaj:

$$\frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{6}\right)}{\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{8}\right)\cdot2}$$

Rješenje:

$$\frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{6}\right)}{\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{8}\right)\cdot2}=-\frac{1}{14}$$

29. Izračunati:

$$\frac{5\cdot\left(2\frac{2}{3}\cdot 3{,}9-1{,}3\right)}{\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\right)\cdot 13}:\frac{5\cdot\left(\frac{10}{3}+\frac{5}{6}\cdot\frac{8}{15}\right):1\frac{8}{9}}{4\frac{2}{7}-\left(5\frac{3}{7}-3\right)}=$$

Rješenje:

Uvažavanjem redoslijeda računskih operacija slijedi

$$\frac{5\cdot\left(2\frac{2}{3}\cdot 3{,}9-1{,}3\right)}{\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\right)\cdot 13}:\frac{5\cdot\left(\frac{10}{3}+\frac{5}{6}\cdot\frac{8}{15}\right):1\frac{8}{9}}{4\frac{2}{7}-\left(5\frac{3}{7}-3\right)}=1\frac{6}{7}$$

30. Putnik je prešao $\frac{3}{8}$ puta između dva mjesta. Kad pređe još $5km$ biće tačno na sredini puta. Koliko km su udaljena ta dva mjesta?

Rješenje

Do sredine puta putniku je preostalo još $\frac{1}{2}$ puta – $\frac{3}{8}$ puta $=\frac{1}{8}$ puta, a to iznosi $5km$.

Cijeli put je $8\cdot 5km=40km$ ili rješenje jednačine $\frac{3}{8}x+5=\frac{1}{2}x$.

31. Dokazati jednakost $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2015\cdot 2016}=\frac{2015}{2016}$

Rješenje

Kako je : $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}=\frac{2-1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1\cdot 2}$

$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3-2}{2\cdot 3}=\frac{1}{2\cdot 3}$ to je

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{2015\cdot 2016}=$$
$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2015}+\frac{1}{2015}-\frac{1}{2016}=\frac{2015}{2016}$$

32. Koliko puta je broj a veći od broja b ako je $a=\frac{7}{4}:0.5+\frac{10}{9}\cdot\left(3\frac{1}{4}+\frac{4}{5}\right)$ i $b=\frac{2}{5}:\left(1.1-\frac{3}{4}-0.5:2\right)$?

Rješenje:

Izračunajmo prvo brojeve a i b.

$$a=\frac{7}{4}:0.5+\frac{10}{9}\cdot\left(3\frac{1}{4}+\frac{4}{5}\right)=\frac{7}{4}:\frac{1}{2}+\frac{10}{9}\cdot\left(\frac{65+16}{20}\right)=\frac{7}{2}+\frac{10}{9}\cdot\frac{81}{20}=\frac{7}{2}+\frac{9}{2}=\frac{16}{2}=8$$

$$b=\frac{2}{5}:\left(1.1-\frac{3}{4}-0.5:2\right)=\frac{2}{5}:\left(\frac{11}{10}-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{5}:\left(\frac{22-15-5}{20}\right)=\frac{2}{5}:\frac{1}{10}=\frac{2}{5}\cdot 10=4$$

Konačno, zaključujemo da je broj a dva puta veći od broja b jer je $a=8=2\cdot 4=2\cdot b$

33. Amir, Damir i Samir dijele $450KM$ tako što će Amir dobiti dva puta više nego što će dobiti Damir, a Samir dva puta manje nego Amir i Damir zajedno. Koliko će svaki od njih dobiti?

Rješenje:

Označimo Damirovu sumu sa x. Tada Amir dobija $2x$, a Samir $\frac{2x+x}{2}$. Imamo:

$$2x + x + \frac{3x}{2} = 450$$

$$x = 100$$

Dakle, Damir dobija 100, Amir 200 i Samir $150\ KM$.

34. Tri druga dijele neku sumu novca tako će prvi dobiti jednu trećinu te sume, drugi će dobiti $200KM$ više nego što će dobiti prvi, a treći će dobiti preostalih $100KM$. Koliko će svaki od njih dobiti?

Rješenje:

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{3} + 200 + 100 = x$$

$$x = 900$$

35. Prvi je dan obitelj zečeva pojela $\frac{1}{6}$ uroda kupusa na nekoj njivi. Drugi su dan pojeli $\frac{1}{5}$ preostalog kupusa, treći dan $\frac{1}{4}$ ostatka, četvrti su dan pojeli $\frac{1}{3}$ ostatka, a peti je dan pojedena $\frac{1}{2}$ ostatka kupusa. Koliki dio uroda kupusa na toj njivi nije pojeden?

Rješenje:

	pojedeno	preostalo
1. Dan	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$
2. dan	$\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$	$\frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
3. dan	$\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{6} = \frac{1}{6}$	$\frac{4}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
4. dan	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
5. dan	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

Nakon pet dana na njivi je ostalo $\frac{1}{6}$ ukupnog uroda kupusa.

36. Jedan radnik završi neki posao za 12 dana, drugi za 15, a treći za 20 dana. Koliko dana treba da rade zajedno da bi se posao završio u cjelosti?

Rješenje:

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\frac{1}{20}=\frac{5+4+3}{60}=\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$$

Ako svi rade zajedno za jedan dan urade $\frac{1}{5}$ posla.

Cijeli posao urade za x: $\frac{1}{5}=x\cdot\frac{5}{1}=5$ dana.

37. U dvije gajbe se nalaze 100 jabuka. Ako uzmemo polovinu iz prve gajbe i $\frac{2}{3}$ iz druge gajbe ukupno smo uzeli 60 jabuka.Koliko iznosi $\frac{1}{3}$ druge gajbe ?

Rješenje:

$$a+b=100 \;\Rightarrow\; a=100-b$$
$$\frac{1}{2}a+\frac{2}{3}\,b=60 \quad /\cdot 6$$

$$3a+4b=360$$
$$3(100-b)+4b=360$$
$$300-3b+4b=360$$
$$b=60 \wedge a=40$$

38. Merisa, Azra, Meliha i Adna zajednički su kupile vrijedan poklon svojoj prijateljici Renati. Merisa je dala polovinu ukupno utrošenog novca za poklon. Meliha je dala trećinu sume koju su dale ostale tri, a Azra je dala četvrtinu sume koju su dale ostale tri. Adna je dala $10KM$. Koja je cijena kupljenog poklona?

Rješenje:

Označimo sa x cijenu poklona. Merisa je dala $\frac{1}{2}x$ novca. Meliha je dala $\frac{1}{4}x$ novca. Naime, ako sa u označimo količinu novca kojeg su uplatile ostale tri zajedno, imaćemo

$$\frac{1}{3}u+u=x \Rightarrow \frac{4}{3}u=x \Rightarrow u=\frac{3}{4}x \Rightarrow \frac{1}{3}u=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}x=\frac{1}{4}x$$

Analogno zaključujemo da je Azra dala $\frac{1}{5}x$ novca, jer u njenom slučaju imamo

$$\frac{1}{4}u+u=x \Rightarrow \frac{5}{4}u=x \Rightarrow u=\frac{4}{5}x \Rightarrow \frac{1}{4}u=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}x=\frac{1}{5}x$$

Konačno, imamo

$\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{5}x+10=x \Leftrightarrow x=200 \Rightarrow$ Cijena kupljenog poklona je $200KM$.

39. Učenik je pročitao knjigu za 3 dana. Prvog dana je pročitao $\frac{1}{3}$ knjige, drugog dana $\frac{6}{7}$ od ostatka. Koliko stranica ima ta knjiga ako je trećeg dana pročitao 80 stranica?
Rješenje:

$$\frac{1}{3}x+\frac{4}{7}x+80=x \Rightarrow x=840$$

40. U akvarijumu je 70 ribica. Ksifa je duplo više od neonki, a kubika je za 10 manje od ksifa. Koliko je ksifa, kubika i neonki u akvarijumu?
Rješenje:

$$x+2x+2x-10=70 \Rightarrow x=16$$
U akvarijumu ima 16 neonki, 32 ksife i 22 kubike.

41. Zbir brojnika i nazivnika nekog razlomka je 4140. Nakon skraćivanja dobijamo razlomak $\frac{7}{13}$. Odrediti razlomak prije skraćivanja?
Rješenje:

$$\frac{7x}{13x} \Rightarrow 7x+13x=4140 \Rightarrow x=207 \Rightarrow \frac{7\cdot 207}{13\cdot 207}=\frac{1449}{2691}-\text{razlomak prije skraćivanja}$$

42. Za 4 dana prodato je žito iz magazina. Prvog dana prodata je $\frac{1}{3}$ žita, drugog dana $\frac{1}{4}$ ostatka, a trećeg dana 5 puta više nego četvrtog dana. Četvrti dan prodato je 90 tona manje nego prvog dana. Koliko je bilo kilograma žita?
Rješenje:

$$\left.\begin{array}{l} x-\text{ukupna količina žita} \\ \frac{1}{3}x-\text{prodato prvi dan} \\ \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{6}x-\text{prodato drugi dan} \\ 5\left(\frac{x}{3}-90\right)-\text{prodato treći dan} \\ \frac{x}{3}-90-\text{prodato četvrti dan} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x}{3}+\frac{x}{6}+5\left(\frac{x}{3}-90\right)+\frac{x}{3}-90=x \Rightarrow x=360$$

43. Kada se u pozitivnom decimalnom broju decimalni zarez pomjeri za jedno mjesto ulijevo dobije se broj koji je za 123.48 manji od prvobitnog broja. Koji je to broj?

Rješenje:

x − traženi decimalni broj

$x:10 = x - 123.48 \Rightarrow x = 10 \cdot (x - 123.48) \Rightarrow x = 10x - 1234.8 \Rightarrow x = 137.2$

Trougao

1 Vanjski uglovi trougla odnose se kao $9:16:20$. Koliko iznose veličine unutrašnjih uglova trougla?

Rješenje:

Znamo da je zbir vanjskih uglova trougla $360°$. Također imamo i proporciju $\alpha_1:\beta_1:\gamma_1 = 9:16:20$. Datu proporciju možemo rastaviti $\alpha_1:\beta_1 = 9:16$ i $\beta_1:\gamma_1 = 16:20$. Iz zadnje dvije proporcije dobijamo $\alpha_1 = \frac{9}{16}\beta_1$ i $\gamma_1 = \frac{20}{16}\beta_1$.
Sada uvrstimo date uglove u formulu za zbir spoljašnjih uglova i dobit ćemo
$\frac{9}{16}\beta_1 + \beta_1 + \frac{20}{16}\beta_1 = 360° \implies \beta_1 = 128°$ pa je $\alpha_1 = 72°, \gamma_1 = 160°$.
Sada iz jednakosti $\alpha + \alpha_1 = 180°, \beta + \beta_1 = 180°, \gamma + \gamma_1 = 180°$ zaključujemo da su unutrašnji uglovi trougla $\alpha = 108°, \beta = 52°, \gamma = 20°$.

2. Ako je zbir dva vanjska ugla nekog trougla $270°$, taj je trougao pravougli. Dokaži tvrdnju.

Rješenje:

Ako unutrašnje uglove označimo sa α, β, γ, tada su vanjski uglovi $180° - \alpha, 180° - \beta, 180° - \gamma$. Kako je zbir dva vanjskih ugla $270°$, slijedi da je $180° - \alpha + 180° - \beta = 270°$, a kad taj izraz sredimo dobivamo da je $\alpha + \beta = 90°$, otud zbog zbira uglova u trouglu slijedi da je $\gamma = 90°$, što znači da je γ pravi ugao, pa je trougao pravougli.

3. Najveći i najmanji ugao jednakokrakog trougla se razlikuju za $12°$. Odredi uglove tog trougla.

Rješenje:

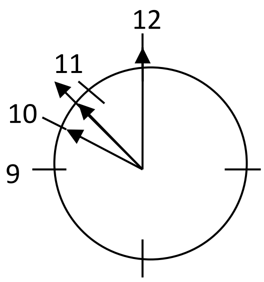
Ako je najveći ugao pri vrhu jednakokrakog trougla, onda su uglovi na osnovici po $(180° - 12°): 3 = 56°$. Ako su uglovi na osnovici veći od ugla pri vrhu onda taj ugao ima $(180° - 24°): 3 = 52°$, a uglovi na osnovici po $(180° - 52°): 2 = 64°$

4. Odredi uglove trougla ako se zna da se oni odnose kao $1 : 3 : 5$.

Rješenje:

Prema uvjetu iz zadatka, imamo da je: $\alpha : \beta : \gamma = 1 : 3 : 5$, pa je $\alpha : \beta = 1 : 3$, $\alpha : \gamma = 1 : 5$, odakle dobijamo $3 \cdot \alpha = 1 \cdot \beta \implies \beta = 3\alpha$, $5 \cdot \alpha = 1 \cdot \gamma \implies \gamma = 5\alpha$
Iz definicije $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, imamo nakon uvrštavanja $\alpha + 3\alpha + 5\alpha = 180°$, odakle dobijamo $\alpha = 20°, \beta = 60°, \gamma = 100°$.

5. Odrediti momenat kada se kazaljke prvi puta poklope nakon 10 sati.
Rješenje:



Dok se kazaljka pomjeri za jedan minutni podiok ona opiše ugao od $360^{\circ}:60=6^{\circ}$.
Minutna kazaljka je 12 puta brža od satne kazaljke. Za 1 minutu ugao između kazaljki se poveća (smanji) za $\left(1-\frac{1}{12}\right)\cdot 6^{\circ}=\frac{11}{12}\cdot 6^{\circ}=5{,}5^{\circ}$. Kada je tačno 10 sati, ugao preko kojega minutna kazaljka juri da stigne satnu kazaljku iznosi $50\cdot 6^{\circ}=300^{\circ}$. Do poklapanja je potrebno $300:5{,}5=3000:55=600:11=54\frac{6}{11}min=54min$ i $\frac{6}{11}\cdot 60sek=54min$ i $32\frac{8}{11}sek\approx 33\ sek.$
Odgovor. Tačno je 10 sati 54 minute i 33 $sekunde$

6. Ako se spoljašnji ugao kod vrha A poveća za 45°, a spoljšnji ugao kod vrha B smanji za 35°, tada se unutrašnji ugao kod vrha C trougla ΔABC poveća za svoju petinu. Izračunati unutrašnji ugao kod vrha C.

Rješenje:

$\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ – spoljašnji uglovi trougla

$\gamma -$ unutrašnji ugao kod vrha C

$\alpha_1+\beta_1=(\beta+\gamma)+(\alpha+\gamma)=(\alpha+\beta+\gamma)+\gamma=180°+\gamma$, znači $\alpha_1+\beta_1=180°+\gamma$.

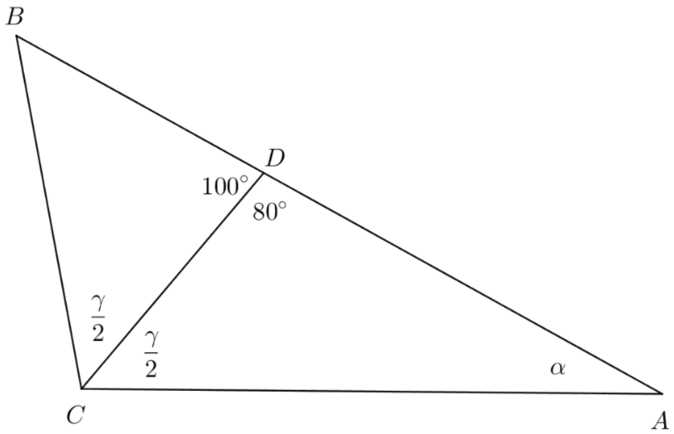
Prema uslovu zadatka imamo:

$$\alpha_1+45°+\beta_1-35°=180°+\gamma+\frac{\gamma}{5}$$

$$\alpha_1+\beta_1+10°=180°+\gamma+\frac{\gamma}{5}\overset{\alpha_1+\beta_1=180°+\gamma}{\Longrightarrow}180°+\gamma+10°=180°+\gamma+\frac{\gamma}{5}\Rightarrow\gamma=50°$$

7. Tačka D stranice AB pripada simetrali ugla $\measuredangle C$ trougla ΔABC, pri čemu je $\measuredangle ADC=80°$ i $\alpha>\beta$. Izračunati razliku $\alpha-\beta$.

Rješenje:



Ugao $\measuredangle ADC$ je spoljašnji ugao trougla ΔDBC , pa je $80° = \beta - \frac{\gamma}{2}$. Slično je $\measuredangle BDC = 100° = \alpha + \frac{\gamma}{2}$. Iz ove dvije jednakosti slijedi da je $\alpha - \beta = 20°$.

8. Odrediti unutrašnje uglove trougla ako je poznato da jedan ugao iznosi $\frac{3}{5}$ drugog , a tri puta je veći od trećeg .

Rješenje:

Ako su $\frac{3}{5}x$, x i $\frac{1}{5}x$ mjere uglova datog trougla onda iz uslova $\frac{9}{5}x = 180° \Rightarrow x = 100°$. Prema tome, uglovi trougla su $60°, 100°$ i $20°$.

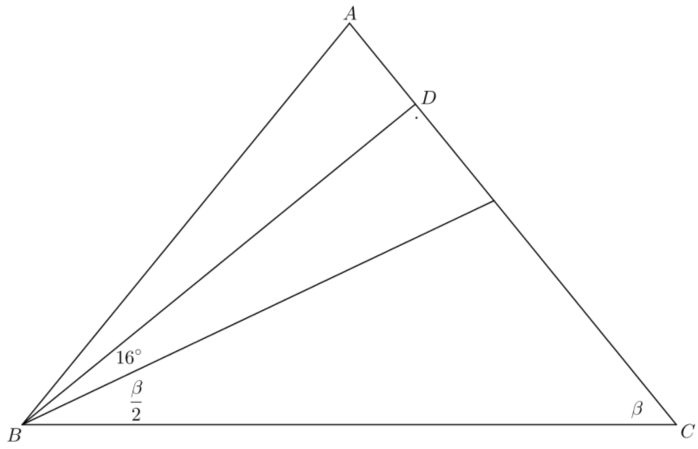
9. Ugao između simetrala dva spoljašnja ugla trougla je $50°$. Odrediti mjeru trećeg unutrašnjeg ugla tog trougla.

Rješenje:

Ako su α i β mjere uglova A i B trougla ΔABC, onda simetrale spoljašnjih uglova A i B grade ugao veličine $\frac{\alpha+\beta}{2}$. Prema uslovu zadatka $\alpha + \beta = 100° \Rightarrow \gamma = 80°$.

10. U oštrouglom jednakokrakom trouglu osnovica je duža od kraka. Simetrala ugla uz osnovicu i visine iz vrha tog ugla na suprotni krak zatvaraju ugao od $16°$. Odrediti veličine unutrašnjih uglova tog trougla.

Rješenje:



ΔBCD: $\measuredangle D + \beta + \left(16° + \frac{\beta}{2}\right) = 180°$

$90° + \beta + 16° + \frac{\beta}{2} = 180°$

$\frac{3\beta}{2} = 74° \;/\cdot 2$

$3\beta = 148° \;/:3$

$\beta = 49°\,20'$

ΔABC: $\alpha + 2\beta = 180°$

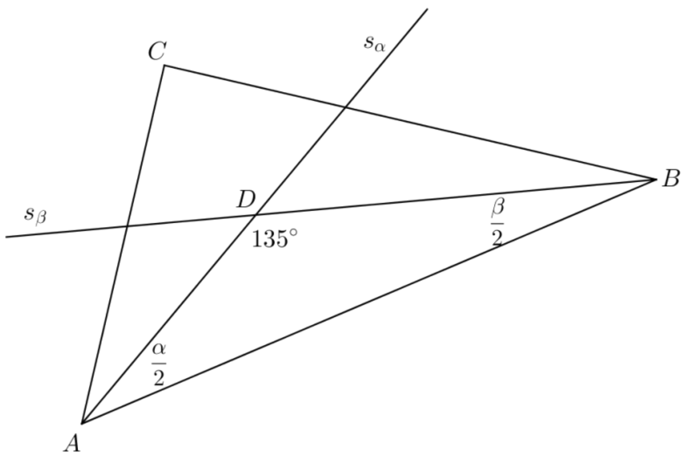
$\alpha + 2 \cdot 49°\,20' = 180°$

$\alpha = 180° - 98°\,40'$

$\alpha = 81°\,20'$

11. Simetrale dva unutrašnja ugla se sijeku pod uglom od 135°. Dokazati da je trougao pravougli.

Rješenje:



ΔABD: $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + 135° = 180°$

$\frac{\alpha+\beta}{2} = 45° \;/\cdot 2$

$\alpha + \beta = 90°$

ΔABC: $\underbrace{\alpha + \beta}_{=90°} + \gamma = 180°$

$90° + \gamma = 180°$

$\gamma = 90° \implies$ trougao je pravougli

12. Zbir dva ugla u trouglu iznosi $\frac{5}{6}$ pravog ugla. Ako je jedan za 20° veći od drugog, odredi sve uglove tog trougla i reci kakav je trougao.

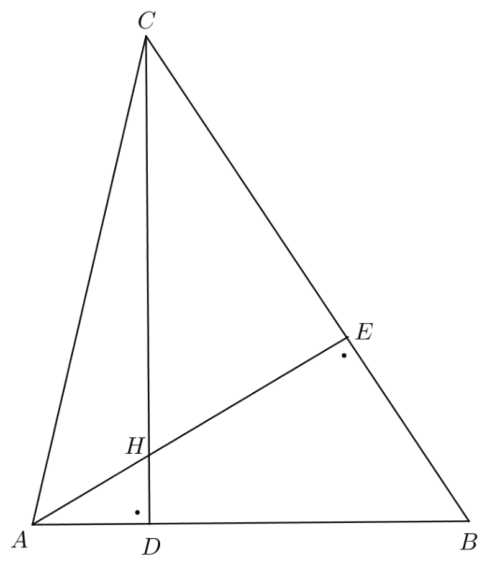
Rješenje:

$\alpha + \beta = \frac{5}{6} \cdot 90°$
$\alpha + \beta = 75°$

$\delta = \alpha + 20°$
$\delta = 75° - \alpha$
$\alpha + 20° = 75° - \alpha$
$2\alpha = 55°$
$\alpha = 27°\ 30'$

$\beta = 75° - \alpha$
$\beta = 47°\ 30'$
$\alpha + \beta + \delta = 180°$
$\delta = 180° - 75°$
$\delta = 105°$
Trougao je tupougli.

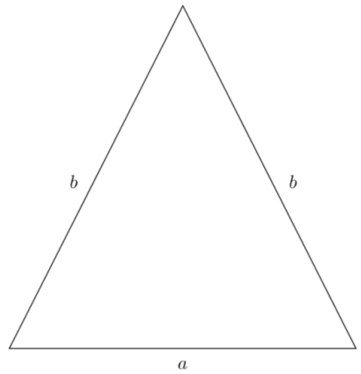
13. Visine CD i AE oštrouglog trougla ΔABC sijeku se u tački H. Ako je $AB = CH$ izračunati $\sphericalangle ACB$.
Rješenje:



Kako je $\sphericalangle EAB = \sphericalangle BCD$ (uglovi sa normalnim kracima) i $\overline{AB} = \overline{CH}$ to su pravougli trouglovi ΔABE i ΔHCE podudarni.
Zaključujemo da je :
$\overline{AE} = \overline{EC}$, a odatle i $\sphericalangle EAC = \sphericalangle ACE = 45°$.

14. Dužine stranica nekog jednakokrakog trougla izražene su prirodnim brojem u centimetrima. Koliko je različitih jednakokrakih trouglova moguće konstruisati ako je obim tog trougla $22cm$?

Rješenje:



Zbir dužina dvaju stranica trougla mora biti veći od dužine treće stranice. Obim datog trougla je $a + 2b = 22$.
Zbir dva parna broja je paran broj, kao i zbir dva neparna broja. Kako je $2b$ parno a i zbir 22 je paran onda zaključujemo da i a mora biti paran broj. Zbog nejednakosti trougla je $2b > a$.
Kako je a parno onda uzimamo redom parne vrijednosti za a i računamo b. Npr., ako je $a = 2cm$ imamo:

$$a + 2b = 22$$
$$2b = 22 - 2$$
$$b = \frac{20}{2}$$
$$b = 10$$

Provjerimo da li je zadovoljena nejednakost trougla, $2b > a$. Jeste jer je $20 > 2$. Dakle, jedan jednakokraki trougao sa obimom $22cm$ je sa stranicama: $a = 2cm$, $b = 10cm$.
Na sličan način dobijemo i ostale parove stranica.

a	$2\ cm$	$4\ cm$	$6\ cm$	$8\ cm$	$10\ cm$
b	$10\ cm$	$9\ cm$	$8\ cm$	$7\ cm$	$6\ cm$

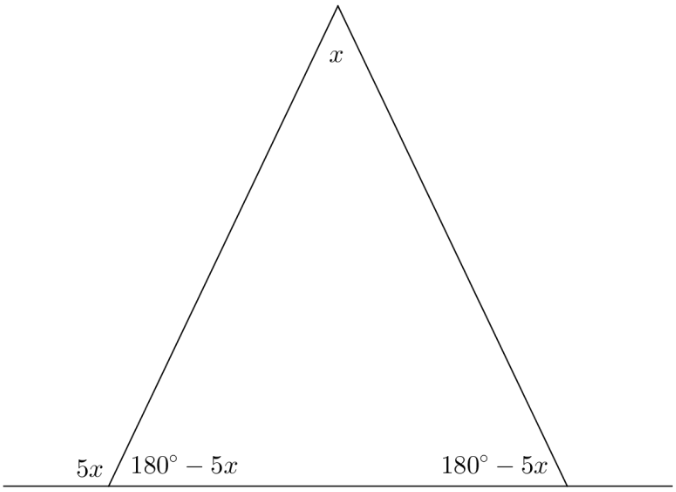
Za $a = 12cm$ imamo sljedeći slučaj:

$$a + 2b = 22$$
$$2b = 22 - 12$$
$$b = \frac{10}{2}$$
$$b = 5$$

Ali, ovdje nije zadovoljena nejednakost trougla, $2b > a$, $(10 > 12)$ stoga ova i sve ostale vrijednosti za a nisu moguće.
Dakle, postoji pet različitih jednakokrakih trouglova koji zadovoljavaju uslove zadatka.

15. Vanjski ugao na osnovici jednakokrakog trougla pet puta je veći od ugla kojega grade kraci. Koliki su uglovi tog trougla?

Rješenje:



Kako je vanjski ugao jednak zbiru dva unutrašnja, njemu nesusjedna ugla, imamo:

$5x = x + 180^\circ - 5x$

$x = 20^\circ$

Dobijamo da su unutrašnji uglovi: 20°, 80°, 80°.

16. Spoljašnji ugao uz osnovicu jednakokrakog trougla je 140°. Izračunati ugao između osnovice trougla i visine konstruisane na krak trougla.

Rješenje:

$\beta + \alpha + 90^\circ = 180^\circ$

$\beta = 90^\circ - 40^\circ$

$\beta = 50^\circ$

$\alpha = 40^\circ$

17. U pravouglom trouglu sa uglovima α, β i $\gamma = 90^\circ$ α je pet puta veca od ugla β. Koliki su uglovi ?

Rješenje:

$\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$

$\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ$

$\alpha + \beta = 90^\circ$

$\alpha = 5\beta$

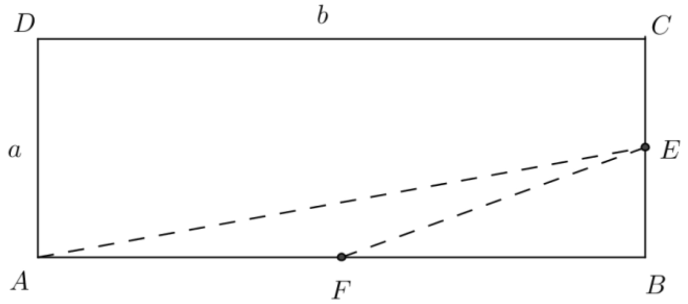
$5\beta + \beta = 90^\circ \implies 6\beta = 90^\circ$

$\beta = 15^\circ \wedge \alpha = 75^\circ$

18. Tačke E i F su redom središta stranica BC i CD pravougaonika $ABCD$. Kolika je površina trougla ΔAEF ako je površina pravougaonika $44\ cm^2$?

Rješenje:

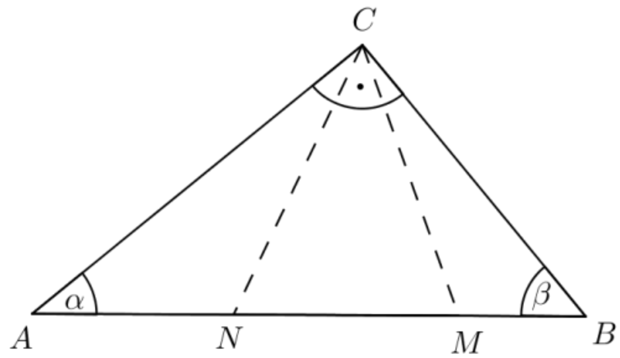
Neka su a i b dužine stranica pravougaonika



$$P_{\Delta ADF} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{a}{2} = \frac{ab}{4}$$
$$P_{\Delta ABE} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{b}{2} = \frac{ab}{4}$$
$$P_{\Delta \mathrm{EC}F} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{ab}{8}$$
$$P_{\Delta ADF} = P_{\square ABCD} - (P_{\Delta ADF} + P_{\Delta ABE} + P_{\Delta \mathrm{EC}F}) = ab - \left(\frac{ab}{4} + \frac{ab}{4} + \frac{ab}{8}\right) =$$
$$= \frac{3}{8}ab = \frac{3}{8} \cdot 44 = 16.5$$

19. Na hipotenuzi AB pravouglog trougla ABC date su tačke M i N tako da je $\overline{AM} = \overline{AC}$ i $\overline{BN} = \overline{BC}$. Izračunati ugao $\sphericalangle MCN$.

Rješenje:



Zbog $\overline{AM} = \overline{AC}$ i $\overline{BN} = \overline{BC}$ slijedi da su trouglovi ACM i BCN jednakokraki, tj.

$\sphericalangle AMC = \sphericalangle ACM = \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° - \frac{\alpha}{2}$ te slično

$\sphericalangle BCN = \sphericalangle BNC = \frac{1}{2}(180° - \beta) = 90° - \frac{\beta}{2}$.

Dakle,

$\sphericalangle MCN = 180° - (\sphericalangle MNC + \sphericalangle NMC) = 180° - \left(90° - \frac{\alpha}{2} + 90° - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} =$

$= \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} \cdot 90° = 45°$

20. Dužine dviju stranica trougla, izražene u centrimetrima, su rješenja jednačina $a + 0.03 = 5.2$ i $\frac{2.1}{b} = 1.2$. Kolika može biti dužina treće stranice ako je ona prirodni broj?

Rješenje:

$a = 5.17, b = 1.75$

$a - b < c < a + b \implies 3.42 < c < 6.92$

Dužina treće stranice c može biti $4cm$, $5cm$ i $6cm$.

21. Jedan oštri ugao pravouglog trougla je $\frac{3}{5}$ drugog. Odredi te uglove.

Rješenje:

$\frac{3}{5}\alpha + \alpha = 90° \implies \alpha = 56°\,15' \wedge \beta = 33°\,45'$

22. Simetrale jednakokrakog trougla sijeku se pod uglom $117°$. Odredi unutrašnje i vanjske uglove tog trougla.

Rješenje:

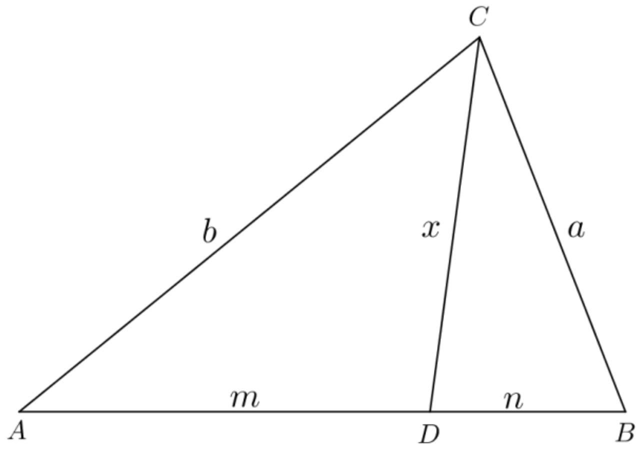
$2\alpha_1 = 180° - 117° \implies \alpha_1 = 31°\,30'$

$\alpha = 63° \wedge \beta = 54°$

$\alpha' = 117° \wedge \beta' = 126$

23. Na stranici AB trougla ABC data je tačka D tako da su obimi trouglova ΔABC, ΔADC i ΔBCD redom $50cm$, $45cm$ i $35cm$. Odrediti dužinu duži CD.

Rješenje:



$$m + n = c$$

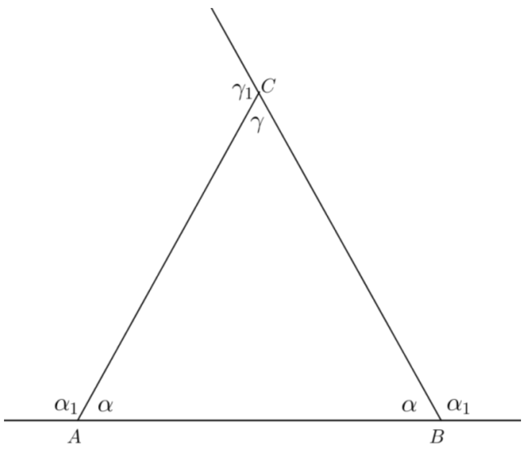
$CD = x$

$$\left.\begin{aligned} \Delta ABC&: a + b + c = 50 \\ \Delta ADC&: m + x + b = 45 \\ \Delta BCD&: n + x + a = 35 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a + b + c + m + x + b + n + x + a = 130$$

$$2a + 2b + 2c + 2x = 130 \;\Rightarrow 2\overbrace{(a + b + c)}^{=50} + 2x = 130 \;\Rightarrow 2x = 30 \;\Rightarrow x = 15$$

24. Vanjski ugao na osnovici jednakokrakog trougla odnosi se prema vanjskom uglu pri vrhu kao $29:32$. Odrediti unutrašnje uglove tog trougla.

Rješenje:



$29:32 = \alpha_1 : \gamma_1$

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{32}{29}\alpha_1 \\ \alpha_1 + \alpha_1 + \gamma_1 &= 360^\circ \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{80}{29}\alpha_1 = 360^\circ \;\Rightarrow\; \alpha_1 = 116^\circ \wedge \gamma_1 = 128^\circ$$

$\alpha + \alpha_1 = 180^\circ \;\Rightarrow \alpha = 64^\circ$

$\gamma + \gamma_1 = 180^\circ \;\Rightarrow \gamma = 52^\circ$

Zadaci za osmi razred

Kvadriranje i korjenovanje

Procentni račun

Cijeli racionalni izrazi

Pitagorina teorema

Trougao, četverougao i mnogougao

Proporcionalnost

Koordinatni sistem

Kod pravouglog trougla je kvadrat na strani spram pravog ugla (na hipotenuzi) jednak kvadratima na stranama koje obrazuju prav ugao (na katetama). Ako je kod trougla kvadrat na jednoj strani jednak kvadratima na ostalim dvjema stranama, onda je ugao koji obrazuju ove dvije strane prav. (47. i 48. stav prve knjige *„Elementi“*[7])

Iako se pripisuje Pitagori, ova teorema je bila poznata Egipćanima, Vaviloncima, Kinezima i Indijcima. Ako se prilikom gradnje hramova ili piramida trebao konstruisati pravi ugao, onda je to činjeno pomoću „egipatskog trougla“[8] *čije su stranice dužine* $3, 4$ *i* 5. *Stari narodi su znali konstruisati pravougli trougao sa stranicama dužina* $6, 8$ *i* 10; $9, 12$ *i* 15; $12, 16$ *i* 20, *odnosno* $15, 36$ *i* 39. *Na ovaj način uvedena je veza između figure i broja, tj. između geometrije i algebre. Smatra se da prvi dokaz Pitagorine teoreme potiče od Pitagore. Prema legendi on je u znak zahvalnosti što je dokazao teoremu bogovima prinio stotinu volova.*

[7] Najznačajnije djelo koje je napisao starogrčki matematičar Euklid (330. – 275. g. p. n. e.). *„Elementi“* su djelo napisano u 13 knjiga zahvaljujući kome je geometrija 300 godine prije nove ere dostigla zavidan nivo. Poslije *„Biblije“* ovo djelo je ljudskoj povijesti najviše proučavano, najčešće prevođeno i printano. Doživjelo je 1700 izdanja. U ovom djelu dokazane su 464 teoreme na način koji je i danas besprijekoran.

[8] Trojke prirodnih brojeva koje zadovoljavaju Pitagorinu jednakost nazivaju se **Pitagorini brojevi**. Trougao čije su dužine stranica Pitagorini brojevi nazivamo **Egipastki trougao**. Takvo ime je dobio jer su ga stari Egipćani koristili u građevinskim poslovima za određivanje pravog ugla što je bilo veoma važno u umjetnosti gradnje u doba Starog Egipta. Stručnjaci za ovakav dio građevinskog posla nazivani su „nosači užeta“ i bili su veoma cijenjeni i dobro plaćeni radnici. Za postavljanje temelja nove građevine koristili su konopce sa 13 čvorova.

Kvadriranje i korjenovanje

1. Izračunati razliku izraza $1^2+2^2+3^2+\cdots+2015^2+2016^2$ i
$1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+\cdots+2015\cdot 2017$.
Rješenje:

Izraz $1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+\cdots+2015\cdot 2017$ možemo rastaviti kao:
$1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+\cdots+2015\cdot 2017=$
$=(2-1)(2+1)+(3-1)(3+1)+\cdots+(2016-1)(2016+1)=$
$=2^2-1+3^2-1+4^2-1+\cdots+2016^2-1$
pa je razlika
$1^2+2^2+3^2+\cdots+2015^2+2016^2-(1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+\cdots+2015\cdot 2017)=$
$=1^2+2^2+3^2+\cdots+2015^2+2016^2-(2^2-1+3^2-1+4^2-1+\cdots+2016^2-1)=$
$=1^2+2^2+3^2+\cdots+2015^2+2016^2-2^2+1-3^2+1-4^2+1-\cdots-2016^2+1=$
$=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{2016\text{ sabiraka}}=2016$

2. Ako je $\sqrt{5}x-\sqrt{5}y=\sqrt{20}$ izračunaj vrijednost izraza $\frac{\sqrt{2}x}{2}-\frac{y}{\sqrt{2}}$.
Rješenje:

$$\sqrt{5}x-\sqrt{5}y=\sqrt{20}\ \Rightarrow \sqrt{5}(x-y)=\sqrt{5}\cdot\sqrt{4}\ \Rightarrow x-y=2$$
$$\frac{\sqrt{2}x}{2}-\frac{y}{\sqrt{2}}=\frac{2x-2y}{2\sqrt{2}}=\frac{2(x-y)}{2\sqrt{2}}=\frac{2\cdot 2}{2\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

3. Izračunati $\frac{a^2+b^2}{ab}$ ako je $\frac{a+b}{b}=2-\sqrt{2}$.
Rješenje:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{a+b}{b}=2-\sqrt{2}\ \Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{b}=2-\sqrt{2}\ \Rightarrow \frac{a}{b}=1-\sqrt{2}\\ \frac{b}{a}=\frac{1}{1-\sqrt{2}}\cdot\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\ \Rightarrow \frac{b}{a}=-1-\sqrt{2}\\ \frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{a^2}{ab}+\frac{b^2}{ab}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=$$

$$=1-\sqrt{2}-1-\sqrt{2}=-2\sqrt{2}$$

4. Izračunati $\left(7\cdot\frac{\sqrt{42}}{\sqrt{7}}+\frac{6\sqrt{18}}{\sqrt{3}}-2\sqrt{30}\cdot\sqrt{5}\right)\cdot\frac{2-\sqrt{6}}{\sqrt{54}-9}=$

Rješenje:

$$\left(7\cdot\frac{\sqrt{42}}{\sqrt{7}}+\frac{6\sqrt{18}}{\sqrt{3}}-2\sqrt{30}\cdot\sqrt{5}\right)\cdot\frac{2-\sqrt{6}}{\sqrt{54}-9}=\left(7\sqrt{6}+6\sqrt{6}-2\sqrt{150}\right)\cdot\frac{2-\sqrt{6}}{3\sqrt{6}-9}=$$

$$=\left(13\sqrt{6}-2\sqrt{25\cdot 6}\right)\cdot\frac{2-\sqrt{6}}{3\left(\sqrt{6}-3\right)}=3\sqrt{6}\cdot\frac{2-\sqrt{6}}{3\left(\sqrt{6}-3\right)}=\frac{6\sqrt{6}-18}{3\left(\sqrt{6}-3\right)}=\frac{6\left(\sqrt{6}-3\right)}{3\left(\sqrt{6}-3\right)}=2$$

5. Ako je $x^2+\frac{1}{x^2}=\frac{82}{9}$ koliko je $x+\frac{1}{x}$?

Rješenje:

Ako lijevoj i desnoj strani jednakosti $x^2+\frac{1}{x^2}=\frac{82}{9}$ dodamo 2 dobićemo

$$x^2+2+\frac{1}{x^2}=\frac{100}{9}\ \Rightarrow\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\frac{100}{9}\ \Rightarrow x+\frac{1}{x}=\pm\sqrt{\frac{100}{9}}\ \Rightarrow x+\frac{1}{x}=\pm\frac{10}{3}$$

6. Izračunati vrijednost izraza $\sqrt{\left(\sqrt{5}-5\right)^2}-\left(\sqrt{5}-5\right)=.$

Rješenje:

$$\sqrt{\left(\sqrt{5}-5\right)^2}-\left(\sqrt{5}-5\right)=\left|\sqrt{5}-5\right|-\left(\sqrt{5}-5\right)=5-\sqrt{5}-\sqrt{5}+5=10-2\sqrt{5}$$

7. Izračunaj (pojednostavi): $\left(4+\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\sqrt{4-\sqrt{15}}.$

Rješenje:

$$\left(4+\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\sqrt{4-\sqrt{15}}=\sqrt{4+\sqrt{15}}\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\sqrt{4+\sqrt{15}}\sqrt{4-\sqrt{15}}=$$

$$=\sqrt{4+\sqrt{15}}\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\sqrt{4^2-\left(\sqrt{15}\right)^2}=\sqrt{4+\sqrt{15}}\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)=$$

$$=\sqrt{\left(4+\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)^2}=\sqrt{\left(4+\sqrt{15}\right)\left(16-4\sqrt{15}\right)}=\sqrt{4\left(4+\sqrt{15}\right)\left(4-\sqrt{15}\right)}=$$

$$=2\cdot\sqrt{\left(4^2-\left(\sqrt{15}\right)^2\right)}=2\sqrt{16-15}=2$$

8. Dokazati nejednakost : $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{5}}} > \frac{8}{5}$.
Rješenje:

$$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{5}}} > \frac{8}{5} \Leftrightarrow 1+\sqrt{2+\sqrt{5}} > \frac{64}{25} \Leftrightarrow 25\sqrt{2+\sqrt{5}} > 39 \Leftrightarrow 625\left(2+\sqrt{5}\right) > 1521$$
$$\Leftrightarrow 625\sqrt{5} > 271 \Leftrightarrow 1953125 > 73441$$

Drugi način:

$$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{5}}} > \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{4}}} = \sqrt{1+\sqrt{2+2}} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3} > \frac{8}{5}$$

$$\sqrt{3} > \frac{8}{5} \Leftrightarrow 3 > \frac{64}{25} \Leftrightarrow 75 > 64$$

9. Odredi najmanji cijeli broj takav da je kvadratni korijen iz proizvoda tog broja i broja 1988 prirodan broj.
Rješenje:

$\sqrt{1988 \cdot n} \in \mathbb{N}$
$1988 = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 71 \qquad \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 71 \cdot 7 \cdot 71} = 2 \cdot 7 \cdot 71 = 994 \in \mathbb{N}$
$n = 7 \cdot 71 = 497$

10. Izračunaj $x+y+z$ ako su x, y i z rješenja jednačina $\sqrt{3(x-2016)} = 3$, $\sqrt{3y-2016} = 3$, $\sqrt{3}(z-2016) = 3$.
Rješenje:

$\sqrt{3(x-2016)} = 3 \;\Rightarrow x = 2019$
$\sqrt{3y-2016} = 3 \;\Rightarrow y = 675$
$\sqrt{3}(z-2016) = 3 \;\Rightarrow z = 2016+\sqrt{3}$
$x+y+z = 2019+675+2016+\sqrt{3} = 4710+\sqrt{3}$

11. Riješiti jednačinu $2\sqrt{x+5} = x+2$ u skupu $\mathbb{R}$.
Rješenje:

Prvo primijetiti da je lijeva strana $2\sqrt{x+5} \geq 0 \;\Rightarrow x+2 \geq 0 \;\Rightarrow\; x \geq -2$
Kvadriranjem jednačine dobijamo jednačinu $x^2 = 16 \;\Rightarrow x = \pm 4$.
Zbog prethodnog uslova zaključujemo da je $x = 4$ jedino rješenje jednačine.

12. Izračunati vrijednost izraza $\sqrt{(2-a)^2+(a+2)^2+23}$ u slučaju kada je $(a-1)^2-(a-2)^2=7$.
Rješenje:

$(a-1)^2-(a-2)^2=7 \implies a=5$
$\sqrt{(2-a)^2+(a+2)^2+23}=\sqrt{(2-5)^2+(5+2)^2+23}=\sqrt{9+49+23}=9$

13. Šta je veće $\frac{\sqrt{11}+\sqrt{7}}{6}$ ili $\frac{1}{\sqrt{12}-\sqrt{6}}$?
Rješenje:
Kako je $\frac{1}{\sqrt{12}-\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{12}+\sqrt{6}}{6} \implies \frac{\sqrt{11}+\sqrt{7}}{6}>\frac{1}{\sqrt{12}-\sqrt{6}}$, jer je $\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)^2>\left(\sqrt{12}-\sqrt{6}\right)^2$ odnosno $\sqrt{77}>\sqrt{72}$.

14. U skupu racionalnih brojeva riješi sljedeće jednačine $x^2-2.\dot{3}=1.\dot{6}$ i $0.\dot{6}y^2=1.5$.
Rješenje:

$$\left.\begin{aligned} 2.\dot{3}&=2.333333\ldots=2\frac{1}{3}\\ 1.\dot{6}&=1.666666\ldots=1\frac{2}{3}\\ 0.\dot{6}&=0.666666\ldots=\frac{2}{3}\end{aligned}\right\} \implies \begin{aligned} &x^2-2.\dot{3}=1.\dot{6} \implies x=\pm 2\\ &0.\dot{6}y^2=1.5 \implies y=\pm 1\frac{1}{2}\end{aligned}$$

15. Dokazati da je broj $4^9+6^{10}+3^{20}$ kvadrat nekog prirodnog broja!
Rješenje:

$$\begin{aligned} 4^9+6^{10}+3^{20}&=(2^2)^9+(2\cdot 3)^{10}+(3^{10})^2=(2^9)^2+2^{10}\cdot 3^{10}+(3^{10})^2=\\ &=(2^9)^2+2\cdot 2^9\cdot 3^{10}+(3^{10})^2=(2^9+3^{10})^2\end{aligned}$$

$\left.\begin{matrix} 2\in\mathbb{N} \implies 2^9\in\mathbb{N}\\ 3\in\mathbb{N} \implies 3^{10}\in\mathbb{N}\end{matrix}\right\} \implies 2^9+3^{10}\in\mathbb{N} \implies$ Dakle, izraz $4^9+6^{10}+3^{20}$ je kvadrat nekog prirodnog broja.

16. Šta je veće $\sqrt{10}+\sqrt{13}$ ili $\sqrt{11}+\sqrt{12}$?
Rješenje:

Ako je $x=\sqrt{10}+\sqrt{13}$, $y=\sqrt{11}+\sqrt{12}$. Tada je :
$x^2=10+13+2\sqrt{10\cdot 13}$ $\qquad$ $y^2=11+12+2\sqrt{11\cdot 12}$
$x^2=23+2\sqrt{130}$ $\qquad$ $y^2=23+2\sqrt{132}$
Kako je $y^2>x^2$ to je $y>x$ tj. $\sqrt{11}+\sqrt{12}>\sqrt{10}+\sqrt{13}$

17. Odredi brojnu vrijednost izraza $0.4 \cdot \sqrt{1\frac{9}{16}} + 0.2 \cdot 2\frac{1}{2} - 15 \cdot \sqrt{\left(-\frac{1}{5}\right)^2} =$

Rješenje

$$\frac{4}{10} \cdot \sqrt{\frac{25}{16}} + \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{2} - 15 \cdot \left|-\frac{1}{5}\right| = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{4} + \frac{1}{2} - 15 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 3 = 1 - 3 = -2$$

18. Ako su $m\ i\ n$ zadani prirodni brojevi, onda za $a = m \cdot n$, $b = \frac{m^2-n^2}{2}$ i $c = \frac{m^2+n^2}{2}$ vrijedi relacija $a^2 + b^2 = c^2$. Dokazati!

Rješenje:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = m^2 \cdot n^2 \\ b^2 = \dfrac{m^4 - 2m^2 \cdot n^2 + n^4}{4} \\ c^2 = \dfrac{m^4 + 2m^2 \cdot n^2 + n^4}{4} \\ a^2 + b^2 = c^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} m^2 \cdot n^2 + \dfrac{m^4 - 2m^2 \cdot n^2 + n^4}{4} = \dfrac{m^4 + 2m^2 \cdot n^2 + n^4}{4} \\ \dfrac{m^4 + 2m^2 \cdot n^2 + n^4}{4} = \dfrac{m^4 + 2m^2 \cdot n^2 + n^4}{4} \end{array}$$

19. Neka je $A = (x + 3y)^2 - (x - 2y)^2$, $B = x^2 - (x - y)^2$. Izraz $\frac{A}{B}$ svedi na što jednostavniji oblik pa izračunaj njegov vrijednost za $x = \frac{1}{4}, y = \frac{1}{3}$.

Rješenje:

$$\frac{A}{B} = 25.$$

20. Izračunaj vrijednost izraza $\frac{1+a^2+a}{a^2-a-1}$ ako je $a = -1 \cdot \sqrt{0,04} - \frac{1}{2} - \sqrt{1 - \sqrt{0,49}} \cdot \sqrt{0,3}$

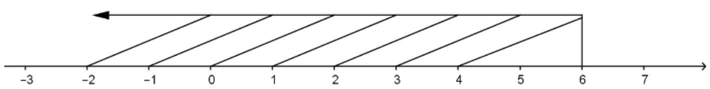
Rješenje:

$$\frac{1 + a^2 + a}{a^2 - a - 1} = 1, a = -1$$

21. Riješi nejednačinu $\left(1 - \frac{x-1}{2}\right)^2 - (1 - \frac{x-2}{2})^2 < \frac{5}{4}$

Rješenje:

$$1 - \frac{2(x-1)}{2} + \frac{(x-1)^2}{4} - \left(1 - \frac{2(x-2)}{2} + \frac{(x-2)^2}{4}\right) < \frac{5}{4} \Rightarrow x < 6$$



$$x \in (-\infty, 6)$$

22. Izračunaj vrijednost izraza $8x^3 - 4x^2$ za $x = \sqrt{2 + \frac{1}{4}}$

Rješenje:

$8x^3 - 4x^2 = 18, x = \dfrac{3}{2}$

23. Dokazati nejednakost $\sqrt{2mn - n^2} + \sqrt{m^2 - n^2} \geq m, m \geq n \geq 0$. Kada vrijedi znak jednakosti?

Rješenje:

Jednakost se postiže za $m = n$

24. Dat je izraz $3a^2 - 3b^2 - 6bc - 3c^2$.

a) Uprosti izraz ako je $b + c = a$.

b) Izračunati numeričku vrijednost datog izraza za $b + c = a = 33\frac{1}{3}$.

Rješenje:

a) 0

b) To će biti specijalno rješenje za datu vrijednost a.

25. Uporedi po veličini brojeve: $A = 5 + 2\sqrt{5}$ i $B = \sqrt{45 + 20\sqrt{5}}$.

Rješenje:

$A = B, A = 5 + \sqrt{5}$ i $\mathrm{B} = 5 + \sqrt{5}$

26. Neka je x pozitivan realan broj za kojeg vrijedi $x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{17}{4}$. Izračunaj:

a) $x - \frac{1}{x}$;

b) $x + \frac{1}{x}$.

Rješenje:

a) $x - \frac{1}{x} = \pm\frac{3}{2}$,

b) $x = \pm 2\frac{1}{2}$

27. Izračuaj: $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$.

Rješenje:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}=9$$

28. Izračunaj: $\left(2006-\sqrt{1+2008\sqrt{1+2007\cdot 2005}}\right)^2$.

Rješenje:

$$\left(2006-\sqrt{1+2008\sqrt{1+2007\cdot 2005}}\right)^2=1$$

29. Ako je $\sqrt{2}\cdot x-\sqrt{2}\cdot y=\sqrt{18}$ izračunaj vrijednost izraza $\frac{\sqrt{3}\cdot x}{3}-\frac{y}{\sqrt{3}}$.

Rješenje:

$$\frac{\sqrt{3}\cdot x}{3}-\frac{y}{\sqrt{3}}=\sqrt{3},\quad x-y=3$$

30. Izračunaj vrijednost izraza $\sqrt{\left(\sqrt{5}-5\right)^2}-\left(\sqrt{5}-5\right)$.

Rješenje:

$$\sqrt{\left(\sqrt{5}-5\right)^2}-\left(\sqrt{5}-5\right)=10-2\sqrt{5}$$

31. Koliko je $\frac{1}{1000}$ od $\left[\frac{1570^2+1070^2-2140\cdot 1570}{10\cdot\sqrt{275^2-225^2}}\right]^2$?

Rješenje:

$$\left[\frac{1570^2+1070^2-2140\cdot 1570}{10\cdot\sqrt{275^2-225^2}}\right]^2=25$$

32. Odredi najmanji prirodni broj a tako da je broj $\sqrt{1350\cdot a}$ prirodan.

Rješenje:

$$1350=2\cdot 3\cdot 5\cdot 5,\qquad a=6$$

33. Šta je veće $5 + 2\sqrt{7}$ ili $3\sqrt{3} + 2\sqrt{6}$?
Rješenje:

$5 + 2\sqrt{7} > 3\sqrt{3} + 2\sqrt{6}$

34. Dokaži da je broj $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ prirodan.
Rješenje:

Kvadriranjem izraza dobije se broj 4, što je trebalo dokazati.

35. Dokazati da je broj $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$ cio broj.
Rješenje:

Kvadriranjem izraza dobijamo rezultat 6.

36. Šta je veće $\frac{5+2\sqrt{6}}{2}$ ili $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$? Bez računanja korijena!
Rješenje:

$$\frac{5 + 2\sqrt{6}}{2} < \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{6}}$$

37. Riješiti jednadžbu

$$x + \frac{1}{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} + 1)} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3} \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2})} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 4} \cdot (\sqrt{4} + \sqrt{3})} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{49 \cdot 50} \cdot (\sqrt{50} + \sqrt{49})} = 1 + \frac{1}{\sqrt{50}}$$

Rješenje:

$x = 0$

38. Riješi nejednadžbu $\left(\frac{5}{2}x^2 + x + 5\right)^2 - \left(\frac{3}{2}x^2 - 5x - 4\right)^2 \geq 0$
Rješenje:

Prvi slučaj: $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$, drugi slučaj: $x \in [-3, +\infty)$.

39. Ako su a, b, c i d realni brojevi i ako je $(ab+cd)^2=(a^2+c^2)\cdot(b^2+d^2)$, onda je $ad=bc$. Dokazati!
Rješenje:

Izvršavanjem računskih operacija dobijamo da je $ad=bc$, što je trebalo dokazati.

40. Riješi jednadžbu $\frac{x(x^2-1)(x^2-4)}{x+|x|}=0.$
Rješenje:

Zadatak ima tri slučaja. Prvi slučaj: $x=0$, drugi slučaj: $x=1$, treći slučaj: $x=2$.

41. Izračunati razliku izraza: $1^2+2^2+3^2+\cdots+2005^2$ i
$1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+\cdots+2004\cdot2006$
Rješenje:

$1^2+2^2+3^2+\cdots+2005^2-(1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+\cdots+2004\cdot2006)=2005$

42. Da li je algebarska vrijednost izraza $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}+\sqrt{9-4\sqrt{5}}$ racionalan ili iracionalan broj?
Rješenje:

Algebarska vrijednost datog izraza je iracionalna.

43. Izračunaj $x(x^2-2)+4-\frac{1}{2}\cdot(x+2)^2$.
Rješenje:

$$x(x^2-2)+4-\frac{1}{2}\cdot(x+2)^2=(x-2)(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

44. Odredi uređene trojke (x,y,z) realnih brojeva za koje vrijedi $x+y=\sqrt{28}$ i
$xy-2z^2=7$.
Rješenje:

$(x,y,z)=\left(\sqrt{7},\sqrt{7},0\right)$

45. Izračunaj $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{1.5}-\sqrt{3.5}}{\sqrt{2}}$

Rješenje:

$$\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{1.5}-\sqrt{3.5}}{\sqrt{2}}=\sqrt{7}$$

46. Izračunaj $\sqrt{\frac{145{,}5^2-96{,}5^2}{193{,}5^2-31{,}5^2}}$

Rješenje:

$$\sqrt{\frac{145{,}5^2-96{,}5^2}{193{,}5^2-31{,}5^2}}=\frac{77}{135}$$

47. Da li je broj $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}-1+\sqrt{2}$ racionalan ili iracionalan broj?

Rješenje:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}-1+\sqrt{2}=1$$

48. Odredi sve parove cijelih brojeva x i y koji zadovoljavaju jednadžbu
$xy+3y=x^2+6x+12$

Rješenje:

$(x,y)\in\{(-4,-4),(-2,4),(-6,-4),(0,4)\}$

49. Dokazati da razlika proizvoljnog trocifrenog prirodnog broja i broja koji se zapisuje istim ciframa, ali u obrnutom redoslijedu ne može biti potpuni kvadrat!

Rješenje:

$\overline{abc}=100a+10b+c-$ traženi trocifreni broj
$\overline{cba}=100c+10b+a-$trocifreni broj zapisan u obrnutom redoslijedu
$\overline{abc}-\overline{abc}=100a+10b+c-(100c+10b+a)=100a+10b+c-100c-10b-a=$
$=99a-99c=99\cdot(a-c)$
Da bi izraz $99\cdot(a-c)$ bio potpun kvadrat $a-c$ mora biti ili 99 ili 11 što nije moguće jer su a i c cifre trocifrenih brojeva.

50. Riješi nejednadžbu $\sqrt{x^2-2x+1}<2016$.
Rješenje:

$\sqrt{(x-1)^2}<2016 \;\Leftrightarrow\; -2016<x-1<2016 \;\Leftrightarrow -2015<x<2017$
Zaključujemo da $x\in(-2015,2017)$.

51. Dokazati da je $A=\left(4+\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)$ racionalan broj.
Rješenje:

$\sqrt{10}-\sqrt{6}=\sqrt{2}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)=\sqrt{2}\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{8-2\sqrt{15}}=2\sqrt{4-\sqrt{15}}$

$A=\left(4+\sqrt{15}\right)\cdot 2\sqrt{4-\sqrt{15}}\cdot\sqrt{4-\sqrt{15}}=2\in\mathbb{Q}$

52. Uporediti brojeve $\sqrt{7-\sqrt{7}}$ i 2.
Rješenje:

I način

Kako je $\sqrt{7}<3$ to je i $7-\sqrt{7}>7-3=4$, pa zaključujemo da je $\sqrt{7-\sqrt{7}}>2$.

II način

Pretpostavimo da je $2>\sqrt{7-\sqrt{7}}$. Kako je $7-\sqrt{7}>0$, jer je $7>\sqrt{7}$ to je dozvoljeno kvadrirati dati korijen, pa ćemo imati:

$2>\sqrt{7-\sqrt{7}}\;/^2$

$4>7-\sqrt{7}\;\;\Rightarrow -3>-\sqrt{7}\;/^2$

$9<7$ što nije tačno. Do pogrešnog zaključka nas je dovela pretpostavka da je $2>\sqrt{7-\sqrt{7}}$ pa nije tačna i zaključujemo da je $2<\sqrt{7-\sqrt{7}}$.

53. Nađi sve cijele brojeve n za koje je $\frac{45}{45-n}$ kvadrat nekog prirodnog broja.
Rješenje:

Potpuni kvadrati koji su faktori broja 45 su 1 i 9. Kako je $45=5\cdot 9=1\cdot 45$ to $45-n$ mora biti jednako ili 5 ili 45, pa zaključujemo da je $n=40$ ili $n=0$.

54. Ako je x prirodan broj veći od 1 i $x^2+\frac{1}{x^2}=\frac{82}{9}$, koliko je $x+\frac{1}{x}$, $x-\frac{1}{x}$ i x?

Rješenje:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}=2+\frac{82}{9}=\frac{100}{9}\ \Rightarrow x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3}$$
$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2-2+\frac{1}{x^2}=-2+\frac{82}{9}=\frac{64}{9}\ \Rightarrow x-\frac{1}{x}=\frac{8}{3}$$

Sabiranjem poslednje dvije jednakosti dobijamo:

$$x+\frac{1}{x}+x-\frac{1}{x}=\frac{10}{3}+\frac{8}{3}\ \Rightarrow 2x=6\ \Rightarrow x=3$$

Procentni račun

1. Izračunaj $22{,}5\%$ od $\frac{1}{3}$ od $\left[\frac{\sqrt{340^2-160^2}+\sqrt{650^2-250^2}}{(1000^2+1000\cdot1940+970^2)\cdot(1000^2-1000\cdot1998+999^2)}\right]^{30}$

Rješenje:

$$\frac{3}{40}$$

2. Cijena knjige smanjila se za 21%. Za koliko treba porasti nova cijena da bi bila jednaka prvobitnoj?

Rješenje:

Neka je cijena knjige x. Tada je njena cijena poslije sniženja od 21%, $0.79x$. Neka je p procentualno uvećanje nove dobijene cijene koja treba biti jednaka prvobitnoj. Sada imamo jednačinu:

$$0.79x + p\cdot 0.79x = x \implies 0.79p = 1 - 0.79 \implies p = \frac{0.21}{0.79} \implies p = 26.6$$

Dakle, novu cijenu treba povećati za 26.6% da bi bila jednaka prvobitnoj.

3. U jednoj školi je prošle školske godine bilo ukupno 1200 dječaka i djevojčica. Ove školske godine se broj dječaka smanjio za 10%, a broj djevojčica se povećao za 20% u odnosu na prethodnu godinu, tako da se ove godine broj učenika povećao za 75. Koliko dječaka, a koliko djevojčica pohađa ove godine tu školu?

Rješenje:

Neka je x broj dječaka u prošloj školskoj godini, a broj djevojčica $1200 - x$. Iz uslova zadatka slijedi da je ove školske godine $0.9x$ dječaka i $1.2(1200 - x)$ djevojčica. Zato vrijedi $0.9x + 1.2(1200 - x) = 1200 + 75 \implies x = 550$. Prema tome, ove školske godine ima $0.9\cdot 550 = 495$ dječaka i $1.2\cdot(1200 - 550) = 780$ djevojčica.

4. Faruk i Dado brodovima voze turiste na višednevna putovanja . Faruk je cijenu putovanja po osobi naplaćivao za 80 KM više od Dade. Kada su to uočili, Faruk je smanjio cijenu putovanja za 10%, a Dado povećao za 15%. Nakon promjene cijena, putovanje Dadinim brodom je za 8 KM po osobi skuplje od putovanja Farukovim brodom. Kolike su nove cijene putovanja?

Rješenje:

Neka je x stara cijena putovanja kod Dade izražena u KM. Tada je $x + 80$ stara cijena putovanja kod Faruka. Nakon promjene, nova cijena kod Farukaje $0.9(x + 80)$, a kod Dade $1.15x$. Kako je, prema uvjetu zadatka, razlika u novim cijenama 8 KM, vrijedi
$1.15x - 8 = 0.9(x + 80) \Rightarrow x = 320$. Dakle, nova cijena kod Dade je
$1.15 \cdot 320 = 368\,KM$, a kod Faruka $0.9 \cdot 400 = 360\,KM$.

5. Otac i majka imaju ukupno 80 godina. Njihova djeca imaju $13, 10$ i 6 godina. Za nekoliko godina zbir godina djece biti će 59% zbira godina oca i majke. Koliko će godina tada imati otac, a koliko majka ako je majka 4 godine mlađa od oca?
Rješenje:

Možemo zaključiti da otac ima 42 godine, a majka 38. Za nekoliko godina, pretpostavimo za x godina, zbir godina djece je 59% zbira godina oca i majke. To zapisujemo
$13 + x + 10 + x + 6 + x = \frac{59}{100}(80 + 2x) \Rightarrow x = 10$. Otac će imati 52, a majka 48 godina.

6. Prošle godine broj učenika u nekoj školi iznosio je 850. Ove godine broj dječaka smanjio se za 4%, a broj djevojčica se povećao za 3% nakon čega broj učenika iznosi 844. Koliki je broj djevojčica ove godine u školi?
Rješenje:

Neka je broj dječaka x onda je broj djevojčica $(850 - x)$. Prema uslovima zadatka možemo formirati jednačinu $0.96x + 1.03(850 - x) = 844 \Rightarrow x = 450$.
Dječaka je 450, a djevojčica je 400.

7. Brat i sestra htijeli su kupiti društvenu igru. Bratu je nedostajalo $\frac{5}{19}$ ukupne cijene, a sestri $\frac{1}{4}$ ukupne cijene. No, zajedno su imali 185 KM više od ukupne cijene igre. Zajedno su kupili igru tako što je brat dao 45% ukupne cijene igre, a sestra ostatak. Koliko je novca ostalo bratu a koliko sestri?
Rješenje:

Neka igra košta $x\ KM$. Tada brat ima $\frac{14}{19}xKM$, a sestra $\frac{3}{4}xKM$. Zajedno imaju:

$$\frac{14}{19}x + \frac{3}{4}x = x + 185 \Rightarrow x = 380$$

Društvena igra je koštala $380KM$. Brat je imao $\frac{14}{19} \cdot 380 = 280KM$, a sestra $\frac{3}{4} \cdot 380 = 285KM$. Brat je za igru dao $\frac{45}{100} \cdot 380 = 171KM$, a sestra $209KM$. Bratu je ostalo $109KM$, sestri $76KM$.

8. Ako se brojnik nekog razomka poveća za 5%, a nazivnik poveća za 20%, hoće li se vrijednost razlomka povećati ili smanjiti i za koliko posto?
Rješenje:

Nakon povećanja brojnika i nazivnika razlomak $\frac{a}{b}$ postaje $\frac{1{,}05a}{1{,}20b} = \frac{105a}{120b} = \frac{7}{8} \cdot \frac{a}{b}$.
Razlomak se umanjio za $\frac{1}{8}$ ili za 12,5 %.

9. Komšinica Fata uzgaja kokoške. Prije 4 godine imala je 32 kokoške. Prve dvije godine se taj broj kokoški uvećavao za 25 % u odnosu na prethodnu godinu, a sljedeće dvije godine se broj kokoški smanjivao za 20 % u odnosu na prethodnu godinu. Koliko kokoški komšinica Fata ima sada ?
Rješenje:

Ako je prije 4 godine imala 32 kokoške, onda je prije tri godine imala 125% od 32 tj. 40 kokoški. Prije dvije godine je imala 125 % od 40 kokoški tj. 50 kokoški 1.25 x 40 $=$ 50. Prije godinu je imala 80% od 50 kokoški tj. 40 kokoški. Sada ima 80% od 40 kokoški 0.8 x 40 $=$ 32 tj. 32 kokoške.

10. Za koliko procenata treba promijeniti cijenu ulaznice za nogometnu utakmicu ako se želi povećati broj gledalaca za 50%, a ukupni prihod za 25%?
Rješenje:

Ako je x broj gledalaca, a y cijena karte, onda je prihod $x \cdot y\ KM$. Izrazimo nove veličine (promjene) pomoću x i y. Ako se broj gledalaca poveća za 50%, bit će $\frac{50}{100}x$ gledalaca. Ako se očekuje 25% veći prihod, prihod će biti $\frac{125}{100}x \cdot y$. Pitanje je kako se pri tom treba promijeniti cijena karte. Sa p označimo tu promjenu. Znači, mora biti $\frac{150}{100}x \cdot py = \frac{125}{100}x \cdot y$. Na lijevoj i desnoj strani pokrate se x i y, pa ostaje $\frac{150}{100} \cdot p = \frac{125}{100} \Longrightarrow p = \frac{5}{6}$. Dakle, $\frac{5}{6}y$ treba biti nova cijena karte. To znači da se cijena mora smanjiti za $\frac{1}{6} \approx 17\%$.

11. Adam treba da proda dva artikla za $120KM$. Ako bi prvi artikl snižio za 25%, a drugi povećao za 25%, izgubio bi $\frac{1}{8}$ zarade. Odredi cijene artikala.
Rješenje:

$x -$ cijena prvog artikla
$120 - x -$ cijena drugog artikla

$0.75\mathrm{x} + 1.25(120 - \mathrm{x}) = \frac{7}{8} \cdot 120 \Rightarrow \mathrm{x} = 90$
Cijene artikala su $90KM$ i $30KM$.

12. U jednoj školi ima manje od 400 učenika. Šest odjeljenja imaju jednak broj učenika i njihov ukupni broj veći je od 150. U ostalim odjeljenjima ima 15% više učenika nego u ovih 6 odjeljenja. Koliko učenika ima u školi?
Rješenje:

Neka je u svakom od 6 odjeljenja s jednakim brojem učenika (x učenika). Tada je u njima ukupno $6x$ učenika. Pošto je $6x > 150$, onda je $x > 25$. U ostalim odjeljenjima je 15% više učenika, što znači $1.15 \cdot 6x = 6.9x$ učenika. Ukupno ih ima $6x + 6.9x = 12.9x$ i taj broj je manji od 400. Dakle, $12.9\,x < 400$ tj. $x < \frac{4000}{129}$. To znači da je $25 < x < \frac{4000}{129}$.
Da bi $12.9x$ bio prirodni broj, mora x biti višekratnik broja 10. Dakle, $x = 30$ tj. u školi ima 387 učenika.

13. Svježe grožđe sadrži 70% vode, a suho 18% vode. Koliko kilograma svježeg grožđa treba da bi se dobilo 24 kilograma suhog grožđa?
Rješenje:

U $24kg$ svježeg grožđa ima 82% suhe materije pa je $24 \cdot 0{,}82 = 19.68kg$. To čini 30% od ukupne količine svježeg grožđa. Rješavanjem jednačine
$0.3 \cdot x = 19.68 \Rightarrow x = 65.6kg.$
Potrebno je $65.6\ kg$ svježeg grožđa da bi se dobilo $24kg$ suhog grožđa.

14. Izračunaj $\frac{25}{7}\%$ od $\frac{\frac{7}{24}:0.125+3.5}{\frac{2}{3}-0.25}$
Rješenje:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{25}{7}\% = \frac{\frac{25}{7}}{100} = \frac{\frac{1}{7}}{4} = \frac{1}{28} \\ &\frac{\frac{7}{24}:0.125+3.5}{\frac{2}{3}-0.25} = 14 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 14 \cdot \frac{1}{28} = \frac{1}{2} = 0.5$$

15. Zbir dvaju brojeva iznosi 120. Koji su to brojevi ako 40% jednog iznosi koliko i 60% drugog ?
Rješenje:

$a + b = 120,\ 0.4a = 0.6b$ imamo da je $a = 1.5b$
$1.5b + b = 120$
$2.5b = 120 \Rightarrow b = 48 \wedge a = 72$

16. U dva kamiona se nalazi 35 tona uglja. Ako se iz prvog uzme 12.5% uglja i doda u drugi tada će u oba kamiona biti jednake količine uglja. Koliko je uglja u svakom kamionu prije pretovaranja ?
Rješenje

Ako je u prvom kamionu x tona uglja tada u drugom kamionu ima $35 - x$ tona uglja. Poslije pretovaranja u prvom kamionu biće $x - 12.5\% \, x$ tona, a u drugom $35 - x + 12.5\% \, x$ tona uglja. Prema uslovu zadatka imamo jednačinu $x - \frac{12.5}{100}x = 35 - x + \frac{12.5}{100}x \Rightarrow x = 20$. U prvom kamionu ima 20 tona uglja, a u drugom 15 tona uglja.

17. Za koliko procenata treba da pojeftini roba koja je nedavno poskupila za 25%, da bi se ponovo prodavala po prvobitnoj cijeni ?
Rješenje

Ako sa x označimo prvobitnu cijenu robe, a sa p broj procenata sniženja, tada je nova roba jednaka $1.25x$ a sniženje bi bilo jednako $\frac{p}{100} \cdot 1.25x$. Prema uslovu zadatka sniženjem za p procenata ponovo dobijamo prvobitnu cijenu, odnosno važi

$$1.25x - \frac{p}{100} \cdot 1.25x = x \Rightarrow p = 20$$

Prema tome, da bi se roba ponovo prodavala po staroj (prvobitnoj) cijeni treba da pojeftini za 20%.

18. Cijena neke knjige je dvaput povećana. Prvi puta za 10%, a drugi puta za 20%. Na kraju je njena cijena bila veća za $198KM$. Kolika je prvobitna cijena knjige?
Rješenje:

$$x + \frac{1}{10}x + \left(x + \frac{1}{10}x\right) \cdot \frac{1}{5} = x + 198 \Rightarrow x = \frac{9900}{16} = 618.75$$

Znači prvobitna cijena knjige je $618 \, KM$ i $75Kpf$.

19. Ako se cijena neke robe poveća za 20 %, onda će nova cijena iznositi $540KM$. Kolika je početna cijena te robe?
Rješenje:

$$x + \frac{20}{100}x = 540$$
$$x = 450KM$$

20. Cijena jednog proizvoda donosila je tvornici gubitak od 20%. Nakon toga cijena je povećana najprije za 10%, a odmah zatim i dalje 35%. Koliki je sada dobitak u postotcima?
Rješenje:

Stvarna vrijednost proizvoda je x
Cijena : $x-\frac{1}{5}x=\frac{4}{5}x$
Nova cijena I : $\frac{4}{5}x+\frac{1}{10}\cdot\frac{4}{5}x=\frac{4}{5}x+\frac{2}{25}x=\frac{22}{25}x$
Nova cijena II: $\frac{22}{25}x+\frac{35}{100}\cdot\frac{22}{25}x=\frac{22}{25}x+\frac{77}{250}x=\frac{297}{250}x=\frac{250}{250}x+\frac{47}{250}x=$

$$=x+\frac{\frac{47}{10}x}{25}=x+\frac{\frac{188}{10}}{100}x=x+\frac{18.8}{100}x$$

Dobitak u postotcima iznosi 18.8. Dakle, 18.8%.

21. Cijena neke robe umanjena je za 4%. Za koliko treba povećati novu cijenu da bi se dobila prvobitna cijena.
Rješenje:

Neka je x prvobitna cijena. Kad se smanji za 4% dobije se nova cijena $\frac{24}{25}x$. Sa y označimo traženi procenat. Imamo jednačinu :

$$\frac{24}{25}x+\frac{y}{100}\cdot\frac{24}{25}x=x \implies y=\frac{25}{6}\approx 4.2\%$$

22. Na takmičenju je 14 učenika riješilo sve zadatke, 32% učenika je riješilo neke zadatke, a 12% učenika nije riješilo niti jedan zadatak? Koliko je učenika učestvovalo na takmičenju?
Rješenje:

$14+0.32x+0.12x=x \implies x=25$ učenika

23. Kolko se sušenog lipovog cvijeta dobije od $60kg$ svježeg ako pri sušenju izgubi 74% svoje mase?
Rješenje:

$60\cdot 0.26=15.6$

24. U kutiji A ima dva puta više klikera nego u kutiji B. Ako bi se 12% klikera iz A i 20% klikera iz B premjestilo u kutiju C, onda bi u njoj bilo 488 klikera što je za 22% više nego što sada ima. Koliko klikera ima u kutiji A?

Rješenje:

$A = 400$ klikera

25. Radnici A, B i C su zajedno zaradili $52400 KM$. Zarada radnika A je 125% od zarade radnika B, odnosno 90% od zarade radnika C. Kolika je razlika između zarada radnika B i C?

Rješenje:

$C - B \; = \; 5600$

26. Imamo 30 litara 40% rastvora alkohola i veću kolicinu 75% rastvora alkohola. Koliko najviše litara 60% rastvora alkohola mozžemo dobiti miješanjem raspoloživih rastvora?

Rješenje:

$x = 70$

27. Poznato je da svježe grožđe sadrzi 82% vlage, a suho 19%. Jedna kompanija je u procesu sušenja grožđa uključila 180 tona svježeg grožđa koje je plaćala kooperantima po cijeni $1.20\ KM$ po kilogramu. Ukupni troškovi sušenja te količine grožđa iznosili su $210\ 000\ KM.$

a) Koliko je tona suhog grožđa dobijeno u tom procesu sušenja?

b) Ne računajući nikakvu posebnu zaradu, po kojoj minimalnoj cijeni bi trebao prodavati suho grožđe, a da se pri tome ne ode u gubitak?

Rješenje:

a) $x = 40$ tona

b) prodaja po $10.65\ KM$

28. Jedna osnovna škola ima dva odjeljenja sedmog razreda. Od ukupnog broja učenika sedmih razreda 52% su dječaci, pri čemu dječaka u VII_1 ima 55% a u VII_2 45%. Koliki je procenat od ukupnog broja učenika sedmih razreda koji čine ucenici VII_1 odjeljenja?

Rješenje:

70% svih učenika

29. Ukupna masa posude napunjene vodom (posuda zajedno sa vodom) iznosi $2000\ gr$. Odbijemo li 20% vode, ukupna masa će se smanjiti na 88% prvobitne mase. Odrediti masu prazne posude i masu vode.
Rješenje:

masa posude $= \ 800gr$,
masa vode $= 1200\ gr$

30. Za pokrivanje poda keramičkim pločicama potrebne su 144 kvadratne pločice jedne vrste. Taj pod je pokriven kvadratnim pločicama druge vrste čija je ivica za 20% veća od ivice pločice prve vrste. Koliko je pločica manje upotrebljeno?
Rješenje:

Upotrebljeno je 44 pločice manje.

31. U posudi imamo rastvor od 24% soli u vodi. Svakog dana iz posude ispari pola litra vode. Poslije tri dana rastvor je sadržavao 48% soli. Koliko je rastvora bilo u posudi prije isparavanja?
Rješenje:

$x = 3$ litra

32. U dvije kutije su pomiješane dvije sorte jabuka, Jonatan i Zlatni delišes. U prvoj kutiji je $12\ kg$ jabuka, od kojih 20% su sorte Jonatan. U drugoj kutiji je $28\ kg$ jabuka, a 80% je sorte Zlatni delišes. Sve jabuke iz manje kutije preručimo u veću kutiju. Koliko procenata sorte Jonatan ima u velikoj kutiji?
Rješenje:

$21.5\ \%$

33. U jednokraki trapez $ABCD$ sa osnovicama AB i CD možemo upisati kvadrat $EFCD$ tako da tjemena E i F leže na dužoj osnovici AB. Površina kvadrata je $1.44m^2$ i predstavlja 80% povrsšine trapeza. Izračunaj osnovicu AB.
Rješenje:
$AB = 1.8m$

34. Cijena nekog proizvoda iznosila je $3750KM$. Tom proizvodu cijena je snižena 8%. Kolika je cijena tog proizvoda nakon sniženja ?
Rješenje:

$3450KM$

35. Ako se brojnik nekog razlomka poveća za 5%, a nazivnik poveća za 20%, hoće li se vrijednost razlomka povećati ili smanjiti i za koliki procenat?
Rješenje:

Razlomak se smanjio 12.5%.

36. Prodavac je cijenu jedne košulje prvo smanjio za 20%, a zatim je povećao za 10%. Da li ponovo tu cijenu treba da korigira naviše ili naniže i za koliko procenata da bi imao cijenu 10% nižu od prvobitne?
Rješenje:

Korekcija nove cijene naviše treba da bude za približno 2.27%.

37. U skladištu trgovine bilo je $5600kg$ brašna. Prvog dana prodano je 10% te količine, a drugog dana $\frac{1}{3}$ ostatka. Preostalo brašno razdijeljeno je na 2 prodavca u omjeru $0,2:\frac{4}{25}$.
Koliko je kg brašna dobila svaka prodavnica?
Rješenje:

$x = 1866.7kg, y = 1493.3kg$

38. U tri vreće ima ukupno $64.2kg$ sećera. Ako u prvoj vreći ima $\frac{4}{5}$ od količine šećera druge vreće, a u trećoj vreći 42.5% od količine iz prve vreće. Kolika je masa šećera u prvoj vreći?
Rješenje:

$24kg$

39. Iznos od $18200KM$ treba podijeliti na tri osobe tako da svaka sledeća osoba dobije 20% više od prethodne. Koliko će novaca dobiti svako od njih?
Rješenje:

Osobe će redom dobiti $5000KM$, $6000KM$ i $7200KM$.

40. Autobus krene iz početne stanice sa određenim brojem putnika. Na prvoj stanici izađe 20% putnika, a uđe 24 putnika. Na idućoj stanici izađe $\frac{2}{3}$ putnika a niko ne uđe. Na poslednjoj se stanici iskrca preostalih 16 putnika. Koliko je putnika ušlo u autobus na početnoj stanici?
Rješenje:

U autobusu je bilo 30 putnika.

41. Jedan ugao trapeza iznosi $72.36°$, a drugi uz istu osnovicu veći je za 10%. Izračunati uglove tog trapeza.
Rješenje:

$$\alpha = 72.36°$$
$$\beta = \alpha + 10\%\alpha$$
$$\beta = 72.36° + \frac{10}{100} \cdot 72.36°$$
$$\beta = 72.36° + 7.24°$$
$$\beta = 79.6°$$

$$\alpha + \delta = 180°$$
$$\delta = 180° - \alpha$$
$$\delta = 180° - 72.36°$$
$$\delta = 107.64°$$

$$\gamma = 180° - \beta = 180° - 79.6°$$
$$\gamma = 100.4°$$

42. Pantalone *ENERGI* koštale su $240KM$. Pojeftinile su 20%, pa poskupile 5%.
Koliko košta poslije poskupljenja?
Rješenje:

$$240 \cdot 0.8 = 192 \ \Rightarrow 192 \cdot 1.05 = 201.60KM$$

Cijeli racionalni izrazi

1. Izračunaj $\frac{\sqrt{3\sqrt{2}+4}}{\sqrt{3\sqrt{2}-4}} - \frac{\sqrt{3\sqrt{2}-4}}{\sqrt{3\sqrt{2}+4}} =$

Rješenje:

$$\frac{\sqrt{3\sqrt{2}+4}}{\sqrt{3\sqrt{2}-4}} - \frac{\sqrt{3\sqrt{2}-4}}{\sqrt{3\sqrt{2}+4}} = 4\sqrt{2}$$

2. Zadano je 2015 brojeva koji imaju osobinu da ako se svaki od njih zamijeni zbirom ostalih, dobije se ponovo istih 2015 brojeva. Dokazati da je proizvod svih zadanih brojeva jednak 0.

Rješenje:

Sa S označimo zbir zadanih 2015 brojeva. Tada se broj a zamjenjuje brojem $b = S - a$.
Saberemo li svih tih 2015 jednakosti, dobijamo
$b_1 + b_2 + \cdots + b_{2015} = 2015S - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{2015})$.
Kako je $b_1 + b_2 + \cdots + b_{2015} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2015} = S$, to je $S = 2015S - S \implies S = 0$.
Zaključujemo da za svaki broj a postoji, među zadanim brojevima, broj $b = -a$. Na taj način bi smo sve zadane brojeve razbili na parove $(a, -a)$, ali zbog neparnosti broja danih brojeva (2015) slijedi da medu zadanim brojevima postoji broj a takav da je $a = -a$, tj. $a = 0$, pa je proizvod zadanih brojeva jednak 0.

3. Izračunati $\frac{5\cdot 4^{15}\cdot 9^9 - 4\cdot 3^{20}\cdot 8^9}{5\cdot 2^9\cdot 6^{19} - 7\cdot 2^{29}\cdot 27^6} =$.

Rješenje:

$$\frac{5\cdot 4^{15}\cdot 9^9 - 4\cdot 3^{20}\cdot 8^9}{5\cdot 2^9\cdot 6^{19} - 7\cdot 2^{29}\cdot 27^6} = \frac{5\cdot 2^{30}\cdot 3^{18} - 4\cdot 3^{20}\cdot 2^{27}}{5\cdot 2^9\cdot (2\cdot 3)^{19} - 7\cdot 2^{29}\cdot 3^{18}} = \frac{2^{27}\cdot 3^{18}(40-36)}{2^{28}\cdot 3^{18}(15-14)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{1} = 2$$

4. Koja je vrijednost cifre na mjestu jedinica broja $1 + 9^{2016}$?

Rješenje:

Potencije broja 9 su $9^1 = 9, 9^2 = 81, 9^3 = 729, 9^4 = 6561, \ldots$
Lako je uočiti da potencije s neparnim eksponentom imaju cifru jedinica 9, a potencije s parnim eksponentom imaju cifru jedinica 1. Broj 9^{2016} ima parni eksponent pa mu je cifra jedinica 1. Dakle, broj $1 + 9^{2016}$ima cifru jedinica 2.

5. Odredi skup svih cijelih brojeva a za koje je $\frac{a^2}{a+3}$ cijeli broj.
Rješenje:

Iz jednakosti $\frac{a^2}{a+3} = \frac{a^2-9}{a+3} + \frac{9}{a+3} \Rightarrow \frac{a^2}{a+3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{9}{a+3} \in \mathbb{Z}\ \frac{9}{a+3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a+3 \in \{-9,-3,-1,1,3,9\} \Rightarrow a \in \{-12,-6,-4,-2,0,6\}$.

6. Riješi jednadžbu $x^4 + 3x^4 + 5x^4 + \cdots + 15x^4 + 17x^4 + 19x^4 - 400 = 0$
Rješenje:

Polazna jednadžba je ekvivalentna jednadžbi:

$$x^4 + 3x^4 + 5x^4 + \cdots + 15x^4 + 17x^4 + 19x^4 = 400$$

Ako bi sabrali prvi i poslednji sabirak dobili bi $x^4 + 19x^4 = 20x^4$, sabiranjem drugog i predzadnjeg sabirka dobili bi $3x^4 + 17x^4 = 20x^4$, itd.,
Ovakvih zbirova imamo ukupno pet pa je jednadžba ekvivalentna sledećoj jednadžbi

$$5 \cdot 20x^4 = 400 \Rightarrow x^4 = 4 \Rightarrow x^4 = \pm\sqrt[4]{4} \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

7. Dokazati da je $16^5 + 2^{15}$ djeljivo sa 33!
Rješenje:

$16^5 + 2^{15} = (2^4)^5 + 2^{15} = 2^{20} + 2^{15} = 2^{15} \cdot 2^5 + 2^{15} = 2^{15} \cdot (32+1) = 33 \cdot 2^{15} \Rightarrow$
Dakle, izraz $16^5 + 2^{15}$ je djeljiv sa 33.

8. Odrediti vrijednost razlomka $\frac{4^{13}-4^{12}-6\cdot 4^{10}}{2^{19}+2^{17}+2^{15}} =$
Rješenje:

$$\frac{4^{13}-4^{12}-6\cdot 4^{10}}{2^{19}+2^{17}+2^{15}} = \frac{4^{10}(4^3-4^2-6)}{2^{15}(2^4+2^2+1)} = \frac{4^{10}(64-16-16)}{2^{15}(16+4+1)} = \frac{4^{10}\cdot 42}{2^{15}\cdot 21} = \frac{(2^2)^{10}\cdot 42}{2^{15}\cdot 21} =$$
$$= \frac{2^{20}}{2^{15}} = \frac{42}{21} = 2^5 \cdot 2 = 2^6 = 64$$

9. Izračunaj vrijednost izraza $\frac{a^2+b^2}{ab}$ ako je $\frac{a+b}{b} = 3$.
Rješenje:

Kako je $\frac{a+b}{b} = 3$ to i $\frac{a}{b} + \frac{b}{b} = \frac{a}{b} + 1$, to je $\frac{a}{b} = 2$. Slijedi da je $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$.

$$\frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{ab} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2 + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$$

10. Izračunaj vrijednost izraza $\frac{|x-y-(x)|}{|x|\cdot|y|-(0,3)^0}$ za $x = -0,333\ldots$ i $y = 2^{-3}$.
Rješenje:

$-\frac{3}{23}, koristiti\ x = -\frac{1}{3}\ i\ y = \frac{1}{8}$

11. Odredi realan broj a $(1 < a < 10)$ i prirodan broj k tako da važi jednakost
$17 \cdot 10^{33} + 26 \cdot 10^{32} - 74 \cdot 10^{31} = a \cdot 10^k$.
Rješenje:

$a = 1886\ \ k = 31$

12. Izračunaj $\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{25}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2015^2}\right) =$.
Rješenje:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{25}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2015^2}\right) = \frac{1008}{2015}$$

13. Dokaži da vrijednost izraza $\frac{(8^5)^{4n}}{(32^{3n})^4}$ ne zavisi od n.
Rješenje:

$$\frac{(8^5)^{4n}}{(32^{3n})^4} = 1$$

14. Izračunati $\sqrt{(-4)^2} + (2^2)^2 \cdot \frac{5^{-8+2\cdot7}}{\left\{\sqrt{13+\sqrt{139+\sqrt{(-5)^2}}}\right\}^3} =$

Rješenje:

$$\sqrt{(-4)^2} + (2^2)^2 \cdot \frac{5^{-8+2\cdot7}}{\left\{\sqrt{13+\sqrt{139+\sqrt{(-5)^2}}}\right\}^3} = 2004$$

15. Ako su x i y prirodni brojevi i $1 + x^2 - y^2 - 2x = 0$, izračunaj $(y - x)^{2013}$
Rješenje:

$(y - x)^{2013} = -1$

16. Dokaži koji je broj veći 54^4 ili 21^{12}.
Rješenje:

$21^{12} > 51^4$

17. Poredaj po veličini brojeve: $a = 2^{45}, b = 3^{36}, c = 4^{27}, d = 5^{18}$
Rješenje:

$b > c > a > d$

18. Izračunaj $\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}} - \frac{x+5}{x-1} =$
Rješenje:

$$\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}} - \frac{x+5}{x-1} = 1$$

19. Naći x ako je $\left(\frac{1}{25\cdot 26} + \frac{1}{26\cdot 27} + \frac{1}{27\cdot 28} + \frac{1}{28\cdot 29} + \frac{1}{29\cdot 30}\right) \cdot 150 + 10.8 : [0.54 \cdot (x - 1)] = 11.$
Rješenje:

$x = 3$

20. Odredi vrijednost izraza $\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx}$ ako za realne brojeve x, y i z vrijedi $xyz = 1$.
Rješenje:

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} = 1$$

21. Ako je $\frac{a}{b} - a = \frac{b}{a} + b$ i $a + b \neq 0, a \neq 0, b \neq 0$, koliko je $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$?
Rješenje:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = -1$$

22. Ako je $\frac{a}{b} + \frac{a}{c} = \frac{11}{10}$ i $\frac{b}{c} = \frac{5}{2}$, odredi razlomke $\frac{a}{b}$ i $\frac{a}{c}$.
Rješenje:

$$\frac{a}{c} = \frac{11}{14}, \frac{a}{b} = \frac{11}{35}$$

23. Ako je $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}$, izračunaj $(x - y)^3 - (x - y^3) + (-x \cdot y^3) - (-x \cdot y)^3$.
Rješenje:

$$(x - y)^3 - (x - y^3) + (-x \cdot y^3) - (-x \cdot y)^3 = \frac{27}{64}$$

24. Koliko ima cijelih brojeva x za koje važi $\frac{1}{4} < \frac{2-x}{7} < \frac{11}{12}$?
Rješenje:

Pet cijelih brojeva zadovoljavaju uslove zadatka, to su $x \in \{0, -1, -2, -3. -4\}$

25. Neka je $a = 2^{2005} - 2^{2004} + 2^{2003}$, $b = 2^{2004} - 2^{2005} + 2^{2006}$, $c = 3\sqrt{3} \cdot 2^{2003}$. Dokazati da je zbir kvadrata neka dva broja a, b, c jednak kvadratu trećeg.
Rješenje:

Nakon što uprostimo brojeve a i b, 2^{2003} označimo sa A, zatim dobijamo da nam je $c^2 = 27A^2$.

26. Uprosti izraz $\left(\frac{x-1}{x^2+x-2} - \frac{x+2}{x^2-4}\right) : \frac{4}{4-x^2} =$
Rješenje:

$$\left(\frac{x-1}{x^2+x-2} - \frac{x+2}{x^2-4}\right) : \frac{4}{4-x^2} = 1$$

27. Dokazati da je $2^{5n} - 2^{5n+3} + 2^{5n+3} + 7 \cdot 2^{5n} = 2^{5n+3}$.
Rješenje:

Na lijevoj strani možemo izvući zajednički, te nakon sređivanja zagrade potvrđujemo jednakost.

28. Skrati razlomak $\frac{20a^3b-10ab^2+5ab}{24a^3x-12abx+6ax}$.
Rješenje:

$$\frac{20a^3b - 10ab^2 + 5ab}{24a^3x - 12abx + 6ax} = \frac{5b}{6x}$$

29. Neka su x i y različiti realni brojevi takvi da je $2xy + 1 \neq 0$ i neka su:

$a = \frac{6x^2y^2+xy-1}{2xy+1}, b = \frac{x(x^2-1)-y(y^2-1)}{x-y}$. Odredi koji je broj veći, a ili b .

Rješenje:

$a > b$

30. Rastavi na faktore: $(x-1)(x-2)(x-3) + (x-1)(x-2) + 1 - x$
Rješenje:

$$(x-1)(x-2)(x-3) + (x-1)(x-2) + 1 - x = (x-1)^2(x-3)$$

31. Dokazati da vrijednost izraza $27a^3 - (3a-2)(9a^2 + 6a + 4)$ ne zavisi od promjenjive a.
Rješenje:

$$27a^3 - (3a-2)(9a^2 + 6a + 4) = 8$$

32. Ako je $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, b \neq 0, d \neq 0$, koliko je: $\frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d} - \frac{ab}{a+b} - \frac{cd}{c+d}$?
Rješenje:

Prvi i drugi razlomak možemo proširiti sa d, da bi kasnije dobili rezultat 0.

33. Ako je $\left[\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right):\left((a+b)(\frac{1}{b}-\frac{1}{a})\right)-\frac{a}{b}\right]:\left(\frac{a}{b}+1\right)=\frac{1}{2014}$, koliko je $\frac{a}{b}$?
Rješenje:

$$\frac{a}{b}=\frac{2013}{2015}$$

34. Odredi realan broj a tako da $x=\frac{1}{2}$ bude rješenje jednadžbe

$$\left(\frac{x+1}{1-x}-\frac{1-x}{x+1}-\frac{4x^2}{x^2-1}\right)\cdot\left(\frac{1}{a^3+a^2}-\frac{1-a}{a^2}-1\right)=\frac{1}{2}$$

Rješenje:

$$a=-\frac{1}{9}$$

35. Riješi algebarski izraz $\left(\frac{x-1}{x^2+x-2}-\frac{x+2}{x^2-4}\right):\frac{4}{x^2-4}=.$
Rješenje:

$$\left(\frac{x-1}{x^2+x-2}-\frac{x+2}{x^2-4}\right):\frac{4}{x^2-4}=-1$$

36. Riješi jednadžbu $\frac{1+3+5+\cdots+2007+2009}{2+4+6+\cdots+2006+2008}=\frac{1}{x}+\frac{1}{2008}$
Rješenje:

$$x=\frac{2008}{2009}$$

37. Rastavi na proste faktore izraz x^5-5x^3+4x.
Rješenje:

$$x(x^2-4)(x^2-1)$$

38. Koji je razlomak veći: $\frac{22222221}{22222223}$ ili $\frac{33333331}{33333334}$?

Rješenje:

$$\frac{22222221}{22222223} > \frac{33333331}{33333334}$$

39. Odredi najmanji prirodan broj pomnožen sa 2646 daje kub nekog prirodnog broja.
Rješenje:

$2646 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7^2$ slijedi da najmanji prirodan broj $2^2 \cdot 7 = 28$ jer je
$2646 - 28 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7^2 \cdot 2^2 \cdot 7 = (2 \cdot 3 \cdot 7)^3 = 42^3$

40. Dokazati da je zbir $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}, n \in \mathbb{N}$ djeljiv sa 14.
Rješenje:

Kako je $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} = 2^n + 2^n \cdot 2 + 2^n \cdot 2^2 = 2^n(1 + 2 + 3 + 4) = 14 \cdot 2^{n-1}$
to je broj 14 je djelilac od $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}$.

41.
a) Skrati razlomak $R = \frac{n^2+2n-8}{n^2-4}$.
b) Odredi sve cijele brojeve n tako da vrijednost razlomka R bude cio broj.
Rješenje:

a)

$$R = \frac{n^2 + 2n - 8}{n^2 - 4} = \frac{(n+4)(n-2)}{(n-2)(n+2)} = \frac{n+4}{n+2}, n \neq \pm 2$$

b)
$$\frac{n+4}{n+2} = \frac{n+2+2}{n+2} = 1 + \frac{2}{n+2}$$

Razlomak R je cio broj ako je $n + 2 \in \{-3, -1{,}0\}$. Ako $n \in \{-3, -1, 0\}$ tada $R \in \{-1, 3, 2\}$.

42. Ako je $x+y=6$ i $x\cdot y=8$ pokazati da je $x^4+y^4=272$.
Rješenje:

$x+y=6 \quad /^2$
$(x+y)^2=36 \implies x^2+2xy+y^2=36 \implies x^2+2\cdot 8+y^2=36$
$x^2+y^2=36-16 \implies x^2+y^2=20 \quad /^2$
$(x^2+y^2)^2=400 \implies x^4+2x^2y^2+y^4=400$
$x\cdot y=8 \ /^2 \implies x^2\cdot y^2=64$
$x^4+2\cdot 64+y^4=400 \implies x^4+128+y^4=400$
$x^4+y^4=400-128$
$x^4+y^4=272$

43. Ako je x realan broj i ako je $x+\frac{1}{x}=3$ izračunaj koliko je : $x^2+\frac{1}{x^2}$ i $x^4+\frac{1}{x^4}$
Rješenje

Ako je $x+\frac{1}{x}=3$ onda je

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=9$$

$$x^2+2+\frac{1}{x^2}=9 \implies x^2+\frac{1}{x^2}=9-2$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=7$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=7 \ /^2$$

$$x^4+2\cdot x^2\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}=49$$

$$x^4+2+\frac{1}{x^4}=49 \implies x^4+\frac{1}{x^4}=49-2$$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=47$$

44. Izračunati $a=\frac{3\sqrt{501}+\sqrt{3}\sqrt{668}-3\sqrt{2004}}{\sqrt{2004}}$.
Rješenje:

$$a=\frac{3\sqrt{501}+\sqrt{3}\sqrt{668}-3\sqrt{2004}}{\sqrt{2004}}=$$

$$\frac{3\sqrt{501}}{\sqrt{2004}}+\frac{\sqrt{3\cdot 668}}{\sqrt{2004}}-\frac{3\sqrt{2004}}{\sqrt{2004}}=\frac{3\sqrt{501}}{\sqrt{4\cdot 501}}+\frac{\sqrt{2004}}{\sqrt{2004}}-3=\frac{3}{2}+1-3=-\frac{1}{2}$$

45. Ako je $abc = 1$, dokazati da je

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(c+\frac{1}{c}\right)=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+\left(b-\frac{1}{b}\right)^2+\left(c-\frac{1}{c}\right)^2-4.$$

Rješenje:

$$\begin{aligned}\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(c+\frac{1}{c}\right) &= abc+\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}+\frac{1}{abc}=\\ &=2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+a^2+b^2+c^2=\\ &=\left(a^2+2+\frac{1}{a^2}\right)\left(b^2+2+\frac{1}{b^2}\right)+\left(c^2+2+\frac{1}{c^2}\right)-4=\\ &=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+\left(b-\frac{1}{b}\right)^2+\left(c-\frac{1}{c}\right)^2-4\end{aligned}$$

46. Postoje li uzastopni prirodni brojevi a, b i c takvi da je $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{53}{60}$?

Rješenje:

Kako je $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}=\frac{65}{60}$, $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{47}{60}$ i kako je

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{65}{60}>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{53}{60}>\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{47}{60}>\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{k}$$

za $m, n, k > 3$ to traženi brojevi ne postoje.

47. Dokazati da vrijednost izraza $(8^{2n+1}\cdot 16^n):4^{5n+1}$ ne zavisi od prirodnog broja n.

Rješenje:

$$(8^{2n+1}\cdot 16^n):4^{5n+1}=[(2^3)^{2n+1}\cdot(2^4)^n]:(2^2)^{5n+1}=2^{6n+3}\cdot 2^{4n}:2^{10n+2}=2^1=2$$

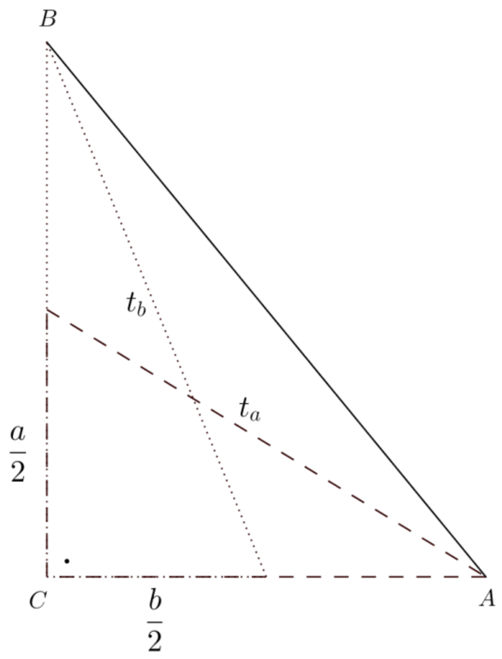
48. Šta je veće $\frac{5+2\sqrt{5}}{2}$ ili $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$?

Rješenje:

$$\left.\begin{aligned}\frac{5+2\sqrt{5}}{2}&=\frac{5}{2}+\frac{2\sqrt{5}}{2}=2.5+\sqrt{5}\\ \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}&=\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}=\sqrt{6}+\sqrt{5}\approx 2.45+\sqrt{5}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ \frac{5+2\sqrt{5}}{2}>\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$$

Pitagorina teorema

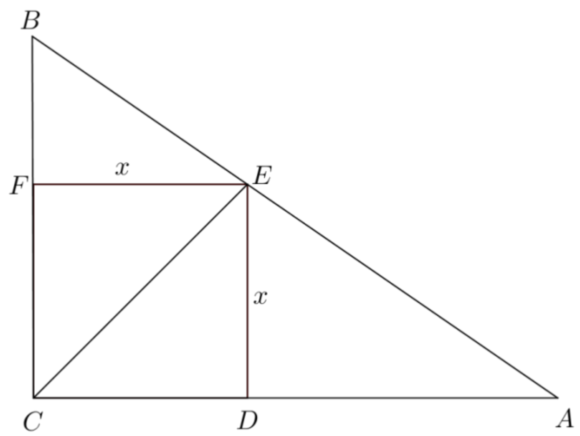
1. U pravouglom trouglu je $t_a = 2\sqrt{13}cm$ i $t_b = \sqrt{73}cm$. Izračunati dužinu hipotenuze.
Rješenje:



Primjenom Pitagorine teoreme na trouglove dobijamo ${t_a}^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \wedge {t_b}^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$.
Sabiranjem ove dvije jednakosti dobijamo

$$\left(2\sqrt{13}\right)^2 + \left(\sqrt{73}\right)^2 = a^2 + b^2 + \frac{a^2 + b^2}{4} \Rightarrow 500 = 4c^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{100} \Rightarrow c = 10cm$$

2. Izračunaj površinu kvadrata $CDEF$ upisanog u pravougli trougao ABC čije katete imaju dužinu $|AC| = 9cm$ i $|BC| = 6cm$.
Rješenje:



Iz zadanih uslova i uz oznake kao na slici površina pravouglog trougla ABC je

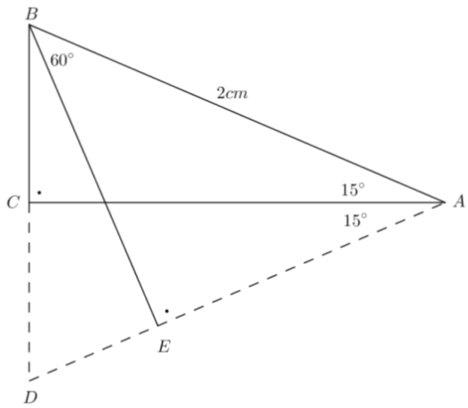
$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BC| = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 6 = 27cm^2$
Kako dijagonala CE kvadrata dijeli trougao ABC na dva trougla (ΔCAE i ΔBCE), to je
$P_{\Delta ABC} = P_{\Delta AEC} + P_{\Delta BCE} = \frac{1}{2}|AC| \cdot x + \frac{1}{2}|BC| \cdot x \implies 27 = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot x \implies x = 3.6cm$
Površina kvadrata $CDEF$ je $P = x \cdot x = 12.96cm^2$.

3. Stranice pravouglog trougla su prirodni brojevi. Ako je hipotenuza 34, odredi katete.
Rješenje:

I način:
$a^2 + b^2 = 34^2 (a, b < 34)$
$a^2 + b^2 = 1156$
Kvadrati prva 33 prirodna broja su: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529, 576, 625, 676, 729, 784, 841, 900, 961, 1024, 1089 $\implies 16^2 + 30^2 = 1156$ Dakle, katete su dužina $16cm$ i $30cm$.

II način
Cjelobrojne stranice pravouglog trougla možemo predstaviti :
$c = m^2 + n^2$, $a = m^2 - n^2$ i $b = 2mn$ $(m, n \in N \; i \; m > n)$. Jednačina $c = m^2 + n^2 = 34$ zadovoljena je za $m = 5$ i $n = 3$, pa su katete: $a = m^2 - n^2 = 5^2 - 3^2 = 16$
$b = 2mn = 2 \cdot 5 \cdot 3 = 30$.

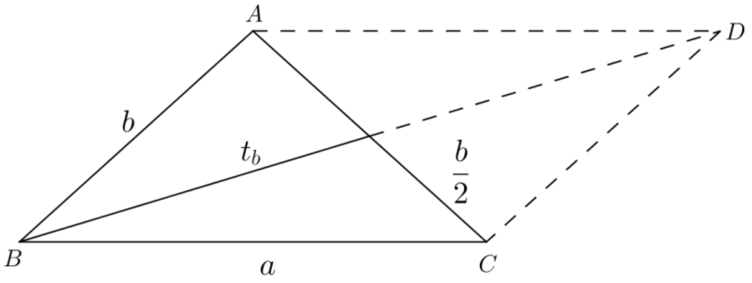
4. Jedan oštri ugao pravouglog trougla je 15°. Odredi površinu i katete trougla čija je dužina hipotenuze $2cm$.
Rješenje:



Duplirajmo pravougli trougao ABC do jednakokrakog trougla ABD.Spustimo visinu BE. Pravougli trougao ABE je specijalan pa je $BE = 1$ i $AE = \sqrt{3}$. Primjenimo Pitagorinu teoremu na pravougli trougao BDE.

$$\left.\begin{array}{l} (2a)^2 = 1^2 + \left(2 - \sqrt{3}\right)^2 \implies a = \sqrt{2 - \sqrt{3}} \\ b = \sqrt{2^2 - \left(2 - \sqrt{3}\right)} \implies b = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \end{array}\right\} \implies P = \frac{ab}{2} = \frac{1}{2}$$

5. Odredi krak b jednaokrakog trougla osnovice $a = 9\sqrt{2}$ i težišnice kraka $t_b = 15$.
Rješenje:



Dopunimo trougao do paralelograma produžavanjem t_b za jednu njenu dužinu.
Zbir kvadrata dijagonala paralelograma jednak je dvostrukom zbiru kvadrata njegovih stranica.
$(2t_b)^2 + b^2 = 2(a^2 + b^2) \Rightarrow b = 24$

6. Neka su h_a, h_b i h_c visine datog trougla ABC. Ako je $\left(\frac{h_c}{h_a}\right)^2 + \left(\frac{h_c}{h_b}\right)^2 = 1$, onda je trougao pravougli. Dokazati.
Rješenje:

$$P = \frac{a \cdot h_a}{2} \Longrightarrow h_a = \frac{2P}{a}$$
$$P = \frac{b \cdot h_b}{2} \Longrightarrow h_b = \frac{2P}{b}$$
$$P = \frac{c \cdot h_c}{2} \Longrightarrow h_c = \frac{2P}{a}$$

Uvrštavanjem u datu jednakost imamo:

$$\left(\frac{\frac{2P}{c}}{\frac{2P}{a}}\right)^2 + \left(\frac{\frac{2P}{c}}{\frac{2P}{b}}\right)^2 = 1$$

$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1 \implies a^2 + b^2 = c^2 \implies$ trougao je pravougli.

7. Dužine stranica pravouglog trougla su $a, a - b$ i $a + b$ gdje su a i b pozitivni realni brojevi i $a > b$. Dokazati da je odnos dužina kateta tog trougla jednak $4 : 3$.
Rješenje:

Na osnovu Pitagorine teoreme i odnosa stranica vrijedi:
$(a + b)^2 = a^2 + (a - b)^2$
$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + a^2 - 2ab + b^2$
Sređivanjem dobijamo $4ab = a^2$ a odavde je $a = 4b$.
Dakle, duža kateta je $4b$, a kraća je $a - b = 4b - b = 3b$ pa je njihov odnos
$4b : 3b = 4 : 3$.

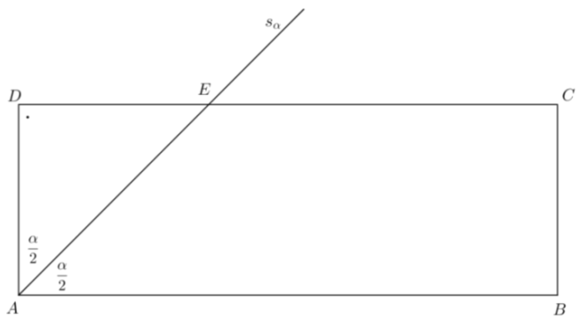
8. Izračunaj površinu pravouglog trougla čiji je obim $36cm$, ako za stranice tog trougla važi $\frac{a+b}{c} = \frac{7}{5}$.

Rješenje:

Obim pravouglog trougla $O = a + b + c = 36cm$. Kako je $\frac{a+b}{c} = \frac{7}{5}$, to dodavanjem broja 1 lijevoj i desnoj strani dobivamo $\frac{a+b+c}{c} = \frac{12}{5}$. Zamjenom $a + b + c = 36$ u prethodnu jednakost dobivamo $\frac{36}{c} = \frac{12}{5} \Rightarrow c = 15$. Sada iz $\frac{a+b}{c} = \frac{7}{5}$ zaključujemo da je $a + b = 21$, a kvadriranjem ovog izraza dobijamo $a^2 + 2ab + b^2 = 441$. Na osnovu Pitagorine teoreme je $a^2 + b^2 = 220$, pa zamjenom u prethodnu jednakost dobivamo $ab = 108$. Kako je $P = \frac{ab}{2} \Rightarrow P = 54cm^2$.

9. U pravougaoniku čije se stranice razlikuju za $1cm$ puovučena je simetrala jednog njegovog ugla. Odječak te simetrale, dio koji pripada pravougaoniku, ima dužinu $10\sqrt{2}cm$. U kojoj razmjeri ta simetrala dijeli površinu pravougaonika?

Rješenje:



$\overline{AE} = 10\sqrt{2}cm, \overline{AB} = \overline{AD} + 1$

$\Delta AED: \sphericalangle D + \frac{\alpha}{2} + \sphericalangle E = 180°$

$\Rightarrow \sphericalangle E = 45°$

$\sphericalangle E = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \Delta AED$ je jednakokrako – pravougli trougao

$\Rightarrow \overline{AD} = \overline{AE} = 10\sqrt{2}cm$

$\Delta ADE: \overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 + \overbrace{\overline{AE}^2}^{\overline{AD}=\overline{AE}}$

$\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AD}^2$

$\overline{AE}^2 = 2\overline{AD}^2$

$\left(10\sqrt{2}\right)^2 = 2\overline{AD}^2$

$2\overline{AD}^2 = 200$

$\overline{AD}^2 = 100$

$\overline{AD} = \sqrt{100}$

$\left.\begin{matrix} \overline{AD} = 10cm \\ \overline{AB} = \overline{AD} + 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overline{AB} = 11cm$

$P_{\square ABCD} = \overline{AB} \cdot \overline{AD}$

$P_{\square ABCD} = 110cm^2$

$P_{\Delta ADE} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{DE}}{2}$

$P_{\Delta ADE} = 50cm^2$

$P_{\square ABCE} = P_{\square ABCD} - P_{\Delta ADE}$

$P_{\square ABCE} = 60cm^2$

Dakle, razmjera površina dijelova pravougaonika je:

$P_{\square ABCE}: P_{\Delta ADE} = 60: 50 = 6: 5$

10. Izračunaj obim i površinu pravouglog trougla ako je $b = 12cm,\ a:c = 3:5$.
Rješenje:

$a:c = 3:5$
$5a = 3c\ /:3$
$c = \frac{5a}{3}$
$c = \frac{5 \cdot 9}{3} = \frac{9 \cdot 5}{3} = \frac{45}{3} \implies c = 15\ cm$

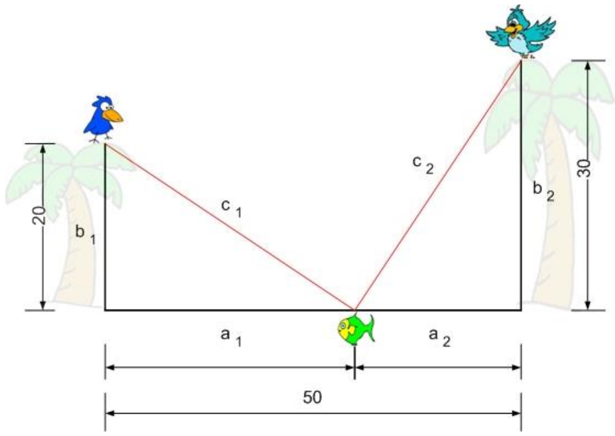
$c^2 = a^2 + b^2$
$\left(\frac{5 \cdot a}{3}\right)^2 = a^2 + b^2$
$\frac{25a^2}{9} = a^2 + b^2 / \cdot 9$
$25a^2 = 9a^2 + 9b^2$
$25a^2 - 9a^2 = 9b^2$
$16a^2 = 9b^2 /: 16$
$a^2 = \frac{9 \cdot 144}{16} = 81$
$a = \sqrt{81}$
$a = 9cm$

$O = a + b + c = 9 + 12 + 15$
$O = 36\ cm$

$P = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{9 \cdot 12}{2} = 54cm^2$

11. Na suprotnim obalama rijeke rastu dvije palme visine $30m$ i $20m$. Udaljenost između palmi je $50m$. Na vrhu svake palme sjedi po jedna ptica. Ptice ugledaju ribu u rijeci i istovremeno polete prema njoj, istom brzinom i istovremeno dolaze do nje. Na kojoj udaljenosti se od podnožja palmi pojavila riba?
Rješenje:

Prvo da nacrtamo jednu sličicu:



Iz teksta zadatka zaključujemo da ako su ptice poletjele istovremeno i u isto vrijeme dolaze do ribe, a lete istom brzinom to mora da prelaze ista rastojanja, znači da je $c_1 = c_2$
Dakle, trebamo naći rastojanja a_1 ia_1, dakle možemo pisati:

$a_1 + a_2 = 50$

$a_1^2 + b_1^2 = a_1^2 + b_1^2$

Nakon što iz prve jednačine izrazimo $a_1 = 50 - a_2$ i uvrstimo u drugu dobijemo jednačinu sa jednom nepoznatom:

$(50 - a_2)^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 \implies 100a_2 = 2000 \implies a_2 = 20 \implies 30_1$

Udaljenost od podnožja palmi je $20m$ odnosno $30m$.

12. Naći površinu jednakokrakog trougla čiji je obim $32cm$, a visina na osnovicu i osnovica su u omjeru $2:3$.

Rješenje:

Kako je $h: a = 2:3$, to imamo da je $h = 2x$ i $a = 3x$. Primjenom Pitagorine teoreme dobijamo:

$b^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

Uvrštavanjem da je $h = 2x$ i $a = 3x$ imamo nakon sređivanja $b = \frac{5}{2}x$

Kako je $O = a + 2b,$ i $O = 32$ imamo:

$3x + 2 \cdot \frac{5}{2}x = 32$

$x = 4$

Vraćanjem u odgovarajuće jednakosti dobijamo $h = 8$ i $a = 12$

$P = \frac{a \cdot h}{2}$

$P = 48$

13. Jedna osnovica trapeza je $8cm$, a sve ostale njegove stranice duge su po $4cm$. Konstruiši trapez i izračunaj površinu.

Rješenje:

$a = 8cm$
$b = 4cm$
$c = 4cm$
$d = 4cm$
$h^2 = b^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 \Rightarrow h \approx 3.5cm$
$P = \frac{a+c}{2} \cdot h \Rightarrow P \approx 21cm^2$

14. Osnovica jednakokrakog trougla je $16cm$, a obim $50cm$. Kolika je površina kvadrata konstruisanim nad njegovom visinom?
Rješenje:

$a = 16cm$	$h^2 = b^2 - (\frac{a}{2})^2$	$P = h^2$
$O = 50cm$	$h^2 = 17^2 - 8^2$	$P = 225cm^2$
$O = a + 2b$	$h^2 = 289 - 64$	
$2b = O - 4$	$h^2 = 225$	
$2b = 34cm$	$h = 15cm$	
$b = 17cm$		

15. Dvije kugle stoje na razdaljini $15m$ jedna je visoka $35m$, druga $43m$.Koliko je rastojanje njihovih vrhova?
Rješenje:

$x^2 = (15m)^2 + (8m)^2$
$x^2 = 225m^2 + 64m^2$
$x^2 = 289m^2$
$x = 17m$

16. Kvadrat i pravougaonik čije su dimenzije $a = 9cm$ i $b = 4cm$ imaju jednake površine. Izračunati razliku njihovih dijagonala.
Rješenje:

− pravougaonik: $a = 9cm;\ b = 4cm \Rightarrow P = 36cm^2$
$d^2 = a^2 + b^2$
$d^2 = 8^2 + 16^2$
$d^2 = 97^2$
$d = 9.8cm$

− kvadrat: $P = 36cm^2$

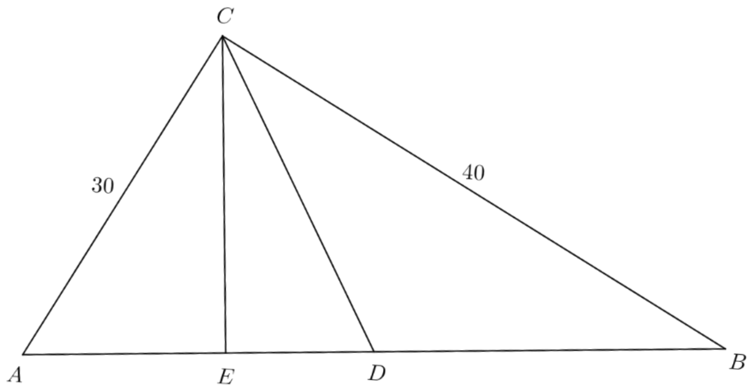
$P = a^2$
$a^2 = 36 \implies a = 6cm$
$d = a\sqrt{2}$
$d = 6\sqrt{2}$
$d = 8.46cm$
$d_p - d_k = 9.8 - 8.46 = 1.34cm$

17. Kolika je hipotenuza pravouglog trougla ako je njegov obim $84\ m$, a površina $210 cm^2$?
Rješenje:

$a + b + c = 84$
$a + b = 84 - c\ /^2$

$a^2 + 2ab + b^2 = 7056 - 168c + c^2 \overset{a^2+b^2=c^2}{\Longrightarrow} 2\text{ab} = 7056 - 168\text{c}$
Iz površine pravouglog trougla dobijemo $ab = 420$ pa je $840 = 7056 - 168c \Rightarrow c = 37.$

18. U pravouglom trouglu ΔABC dužine kateta $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ su redom $30cm$ i $40cm$. Ako je D središte hipotenuze, a E podnožje hipotenuzine visine, izračunati dužinu duži $\overline{DE}$.
Rješenje:



Primjenom Pitagorine teoreme na pravougli trougao ΔABC, dobija se dužina hipotenuze $\overline{AB}$.
$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50cm.$
D je središte hipotenuze, pa je $\overline{AD} = \overline{DB} = 25cm.$
Kombinovanjem dviju formula za računanje površine pravouglog trougla dobija se dužina visine $\overline{CE}$.

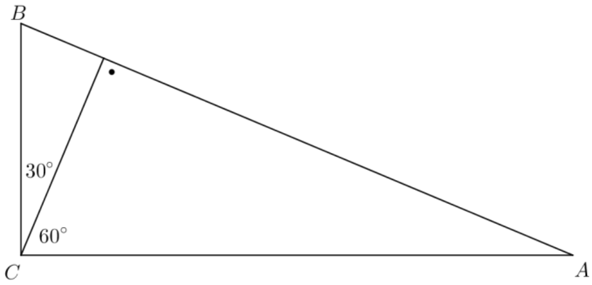
$$P = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BC}}{2}$$

$$P = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CE}}{2}$$

$$\overline{CE} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BC}}{\overline{AB}} = 24cm$$

Primjenom PT na pravougli trougao ΔACE, dobija se dužina duži $\overline{AE}$.
$\overline{AE} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CE}^2} = \sqrt{30^2 - 24^2} = 18cm.$
Tražena dužina duži iznosi:
$\overline{DE} = \overline{AD} - \overline{AE} = 7cm$

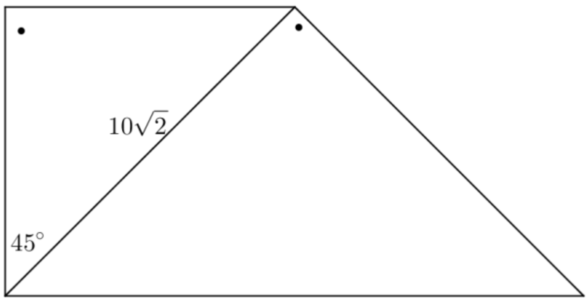
19. Izračunaj obim i površinu trougla ABC (vidi sliku) ako je $CA = 10cm$.



Rješenje:

$O = 10(1+\sqrt{3})cm$, $P = \frac{50\sqrt{3}}{3}cm^2$

20. Izračunaj obim i površinu četverougla sa slike



Rješenje:

$O = 10\left(4+\sqrt{2}\right)cm, P = 150cm^2$

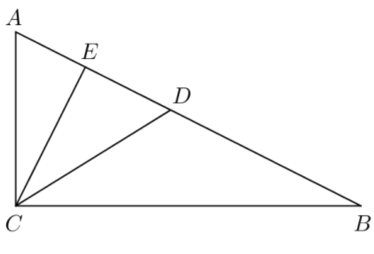
21. Dat je pravougaonik $ABCD$ kojem je dužina stranice $AB = 20cm$. Dužina okomice iz vrha B na dijagonalu AC je $12cm$. Odredi obim i površinu pravougaonika.

Rješenje:

$O = 70cm, P = 300cm^2$

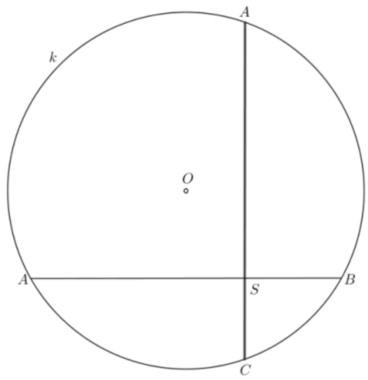
22. Dat je pravougli trougao ΔABC takav da je $\measuredangle ACB = 90°, CA = \sqrt{5}cm$ i $CB = 2\sqrt{5}cm$. Neka je $D \in AB$ i $CD = \sqrt{5}cm$. Odrediti obim i površinu trougla BCD.

Rješenje:



Ako uočimo E na AB tako da je $CE \perp AB$, tada je $AE = ED$ jer je ΔCDA jednakokraki. Sada je $AB = 5cm, CE = 2cm$ i $AE = ED = 1cm$.Prema tome, $O_{\Delta BCD} = 3(1+\sqrt{5})$, a $P_{\Delta \mathrm{BCD}} = 5 - 2 = 3$.

23. U kružnici k, na slici, tetive AB i CD su međusobno normalne. Izračunaj njihove dužine ako je $AC = 10cm$, $DB = 8cm$ i $SC = 6cm$.



Rješenje:

$AB = 12.8cm, CD = 12.4cm$

24. Dva stuba su visine $20m$ i $30m$. Vrh svakog stuba povezan je s dnom drugog sa nategnutim užetom. Na kojoj visini od tla se ta dva užeta ukrštaju ako je udaljenost stubova $40m$?

Rješenje:

Ta dva užeta se ukrštaju na visini $12m$ od tla.

25. U pravouglom trouglu ABC dužine kateta AC i BC su redom $30cm$ i $40cm$. Ako je tačka P središte hipotenuze, a N podnožje visine na hipotenuzu, odredi dužinu PN.

Rješenje:

$PN = 7cm$

26. U jednakokrakom trapezu srednja linija s, a dijagonala je dva puta duža od srednje linije s. Kolika je površina tog trapeza ?

Rješenje:

$P = s^2\sqrt{3}cm^2$

27. Tačke $PQRS$ su redom središta stranica AB, BC, CD, DA romba $ABCD$. Stranice paralelograma $PQRS$ se odnose kao $3:4$, a površina $PQRS$ iznosi $30cm^2$. Izračunaj površinu romba.
Rješenje:

$P = 72cm^2$

28. Zbir dužina dijagonala romba je $84cm$. Produžimo li jednu dijagonalu za $4cm$, a drugu skratimo za $4cm$, površina romba će se povećati za $16cm^2$. Izračunaj dužinu stranice i dužinu dijagonale romba.
Rješenje:

$a = 30cm,\ d_1 = 36cm,\ d_2 = 48cm$

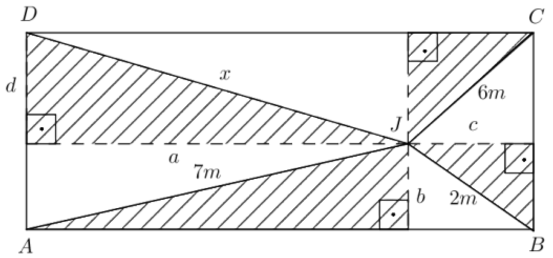
29. U oštrouglom trouglu ABC visina iz vrha C dijeli suprotnu stranicu na dva dijela: AB i DB kojima su dužine $AD = 4cm$, $DB = 1cm$. Ugao kod vrha A je 60°, odredi dužinu stranica trougla ABC i dužinu visine tog trougla.
Rješenje:

$AC = 8cm,\ BC = 7cm,\ h = 4\sqrt{3}cm$

30. Majstor je razrezao šipku dužine $30\ cm$ na 4 dijela kako bi od tih dijelova napravio pravougli trougao. Majstor je razrezao šipku na dva dijela od kojih je jedan kraći za $6\ cm$ i njega uzeo za jednu katetu. Odredi dužine dijelova.
Rješenje:

$a = 12cm,\ b = 5cm,\ c = 13cm$

31. Vrt ima oblik pravougaonika sa tjemenima A, B, C i D. U vrtu raste jablan koji je od tjemena A udaljen $7m$, od tjemena B udaljen je $2m$ i od C udaljen je $6m$. Koliko je udaljen od tjemena D?
Rješenje:

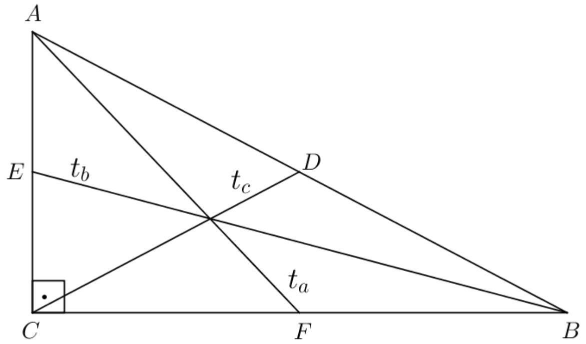


$J -$ jablan
$x -$ udaljenost jablana od tjemena D

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = a^2 + d^2 \\ a^2 = 7^2 - b^2 \\ \left.\begin{array}{l} d^2 = 6^2 - c^2 \\ c^2 = 2^2 - b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow d^2 = 6^2 - (2^2 - b^2) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x^2 = 7^2 - b^2 + 6^2 - (2^2 - b^2) \\ x = 9m \end{array}$$

32. U pravouglom trouglu težišne linije su vezane relacijom $t_a^2 + t_b^2 = 5t_c^2$. Dokazati.

Rješenje:



$$\Delta ACF: t_a^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\Delta BCE: t_b^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$t_a^2 + t_b^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

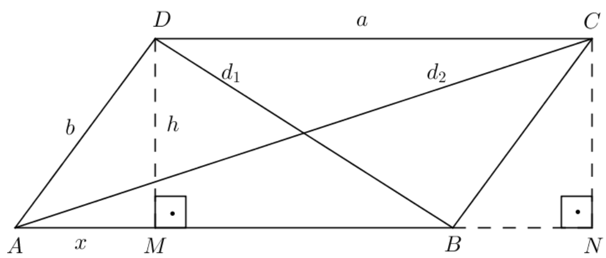
$$t_a^2 + t_b^2 = \frac{5}{4}\underbrace{(a^2 + b^2)}_{c^2=(2t_c)^2}$$

$$t_a^2 + t_b^2 = \frac{5}{4} \cdot 4t_c^2$$

$$t_a^2 + t_b^2 = 5t_c^2$$

33. Dokazati da je zbir kvadrata dijagonala proizvoljnog paralelograma jednak dvostrukom zbiru kvadrata njegovih stranica.

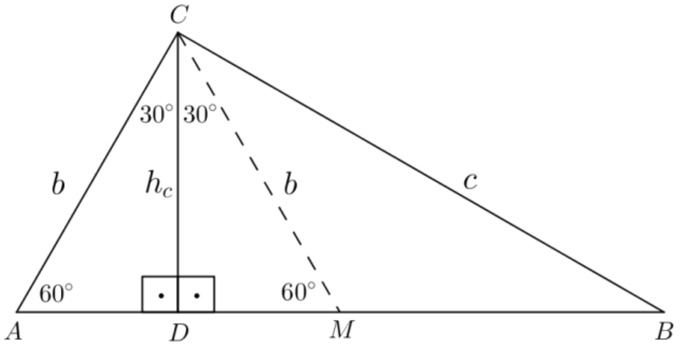
Rješenje:



$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} d_1^2 = h^2 + (a - x)^2 \\ \Delta DAM: h^2 = b^2 - x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ax \\ \left.\begin{array}{l} d_2^2 = h^2 + (a + x)^2 \\ \Delta BCN: h^2 = b^2 - x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow d_2^2 = a^2 + b^2 + 2ax \end{array}\right\} \Rightarrow d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$$

34. Dat je ugao $\alpha = 60°$ trougla ABC. Dužina visine CD na stranicu C je $CD = \sqrt{3}cm$ i $DB = 6\sqrt{2}cm$. Izračunaj dužine stranica trougla ABC.

Rješenje:



$$\left.\begin{array}{l}\alpha = 60° \\ \left.\begin{array}{l}\sphericalangle ACD = 180° - 90° - 60° = 30° \\ \sphericalangle MCD = 180° - 90° - 60° = 30°\end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle MCA = 60° \\ \sphericalangle AMC = 60°\end{array}\right\} \Rightarrow \text{trougao } \Delta AMC \text{ je jednakostranični} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_c = \frac{b\sqrt{3}}{2} \Rightarrow b = 2cm$$

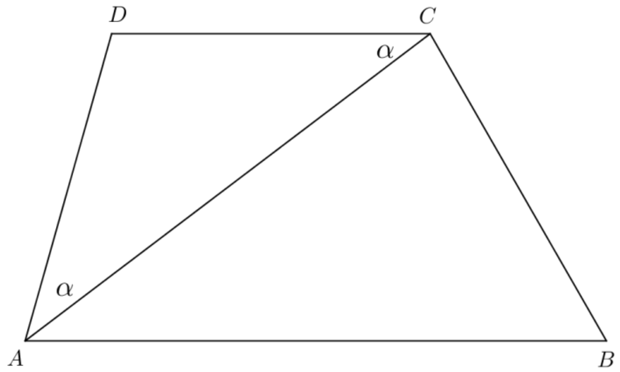
$$\left.\begin{array}{l}AD^2 = b^2 - h_c^2 \Rightarrow AD = 1cm \\ c = AD + DB \\ DB = 6\sqrt{2}cm \approx 8.46cm\end{array}\right\} \Rightarrow c \approx 9.46cm$$

$$a^2 = h_c^2 + DB^2 \Rightarrow a \approx 8.65cm$$

Trougao, četverougao i mnogougao

1. U trapezu $ABCD$ krak BC duži je od drugog kraka za $3.8cm$, a od veće osnovice je manji za $4.4cm$. Dijagonala trapeza AC simetrala je ugla $\measuredangle DAB$. Izračunaj stranicu AB ako je obim trapeza $56cm$.

Rješenje:



AC je simetral ugla $\measuredangle DAB$ pa je ΔACD jednakokraki i vrijedi $AD = DC = x$. Dalje, iz uslova zadatka može se zaključiti da je $BC = x + 3.8$, a $AB = x + 3.8 + 4.4 = x + 8.2$.
Rješavanjem jednačine $x + 8.2 + x + 3.8 + x + x = 56$ dobije se $x = 11$, odnosno $AB = 19.2$.

2. Izračunaj srednju liniju jednakokrakog trapeza ako je dužina njegove dijagonale $25cm$, a visina $15cm$.

Rješenje:

$m = 20cm$

3. Uzastopni uglovi nekog četverougla su $\alpha, \alpha + 20°, \alpha + 30°$, i $\alpha + 50°$. Koliki su uglovi tog četverougla? Da li je taj četverougao trapez?

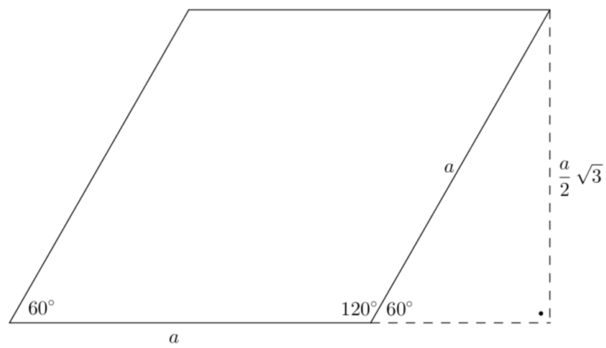
Rješnje:

$\alpha + \alpha + 20° + \alpha + 30° + \alpha + 50° = 360° \Longrightarrow \alpha = 65°$
Uglovi ovog četverougla su $65°, 85°, 95°$ i $115°$. Četverougao je trapez ako je $\alpha + \delta = 180°$, a u našem slučaju je $\alpha = 65°$ i $\delta = 115°$ pa ćemo imati $\alpha + \delta = 65° + 115° = 180°$ pa zaključujemo da je četverougao trapez.

4. Izračunati obim romba koji ima površinu $\sqrt{12}cm$ i čiji se uglovi odnose kao 1: 2 .

Rješenje:

Kako su susjedni uglovi romba suplementni, to je $\alpha + 2\alpha = 180° \Longrightarrow \alpha = 60°$.



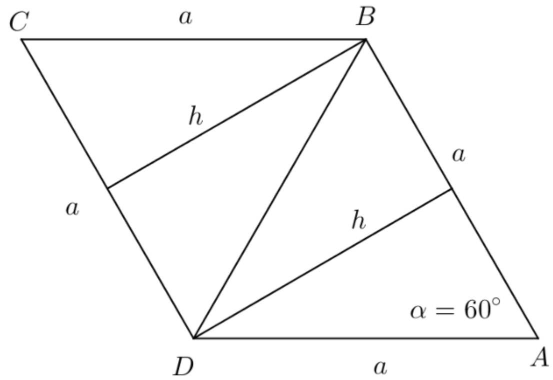
Ako je h visina romba $h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$ i $P = \sqrt{12}cm^2$ i $P = a \cdot h \implies \sqrt{12} = a \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$.
Rješenjem jednačine dobijamo $a = 2\ cm$. Obim romba je $O = 8cm$.

5. Ako se broj stranica konveksnog mnogougla poveća za 13, broj dijagonala se poveća za 234. Izračunati broj dijagonala datog mnogougla.
Rješenje:

Ako je n broj stranica, a Dn broj dijagonala datog mnogougla, iz uslova:
$D(n+13) = Dn + 234$
odnosno $\frac{(n+13)(n+13-3)}{2} = \frac{n(n-3)}{2} + 234$dobijamo da je $n = 13$. Prema tome dati mnogougao ima: $D(13) = \frac{13(13-3)}{2} = 65$ dijagonala.

6. U rombu stranice $a = 6\sqrt{3}$ i ugla $\alpha = 60^\circ$ upisan je pravougaonik tako da mu manja dijagonala bude dijagonala pravougaonika. Naći površinu pravougaonika.
Rješenje:

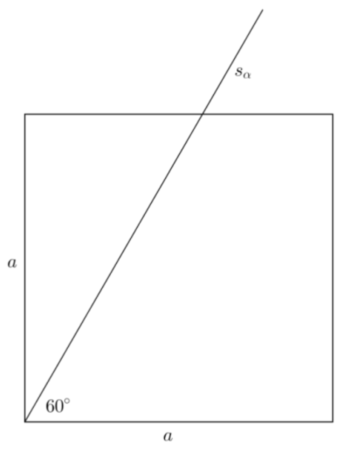
$a = h -$ visina jednakostranicnog trougla
$b = \frac{1}{2}a \implies P = 27\sqrt{3}$



7. Jedan ugao četverougla je 50° drugi ugao je jednak polovni trećeg, dok je četvrti ugao jednak zbiru prva dva ugla. Odredi uglove četverougla.
Rješenje:

$\alpha = 50°$
$\delta = \frac{\gamma}{2} \Rightarrow 2\delta = \gamma$
$\beta = \alpha + \delta$
$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$
$50° + \delta + 2\delta + 50° + \delta = 360°\ 4\delta = 260°$
$\delta = 65°$
$\gamma = 2\delta$
$\gamma = 130°$
$\beta = \alpha + \delta$
$\beta = 115°$

8. Prava dijeli kvadrat tako da u tjemenu kvadrata obrazuje sa stranicom ugao od 60°. Izračunati površinu većeg dijela kvadrata ako je $a = 3cm$.
Rješenje:



$P_2 = a \cdot \frac{a}{2}$ $\qquad P_1 = \frac{a \cdot \frac{a}{2}}{2}$

$P_2 = 4.5cm^2$ $\qquad P_1 = \frac{a^2}{4}$

$P = P_1 + P_2$ $\qquad P_1 = \frac{9}{4}$

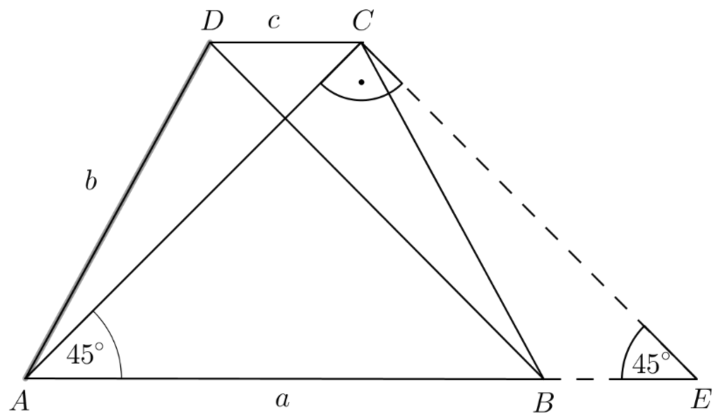
$P_1 = 2.25cm^2$

$P = 6.75cm^2$

9. Odrediti površinu četverougla $ABCD$ za kojeg znamo sljedeće: dva suporotna ugla su pravi; dvije stranice koje zatvaraju jedan od njih su jednake dužine; zbir dužina druge dvije stranice iznosi $10cm$.
Rješenje:

$P = 25cm^2$

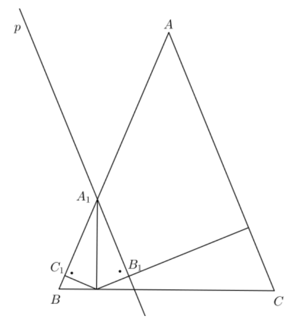
10. Dijagonala jednokrakog trapeza dužine $10cm$ određuje sa dužom osnovicom ugao od $45°$. Izračunati površinu trapeza.
Rješenje:



Neka je $CE \parallel BD$. Tada je $AE = a + c$, a ΔAEC je jednakokraki pravougli trougao. Kako je $a + c = 10\sqrt{2}$, a visina $h = \frac{a+c}{2} = 5\sqrt{2}$ slijedi da je
$P = \frac{a+c}{2} \cdot h = 50cm^2$.
Trapez i trougao imaju jednake površine pa je površina trapeza $P = \frac{1}{2} AC \cdot CE = 50cm^2$.

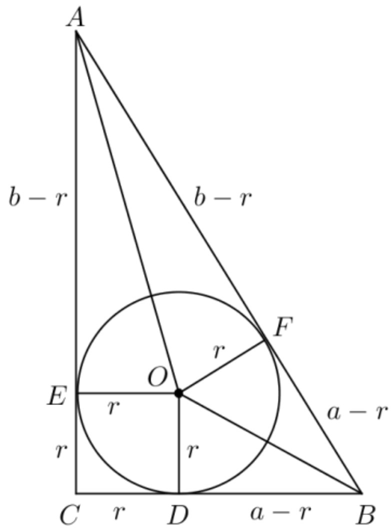
11. Na osnovici jednakokrakog trougla ABC odrediti tačku M tako da razlika njenih udaljenosti od krakova tog trougla bude jednaka polovini dužine kraka AB.
Rješenje:

Neka je ΔABC jednakokraki trougao sa osnovicom BC, a prava p je paralelna sa pravom AC i od nje udaljena $\frac{1}{2} AB$. Prava p odsjeca od ΔABC jednakokraki trougao $A_1B_1C_1$, a podnožje M visina tog trougla iz vrha A_1 je tražena tačka.



12. Ako su a i b katete, a c hipotenuza pravouglog trougla onda je poluprečnik kruga upisanog u taj trougao dat sljedećom relacijom $r = \frac{a+b-c}{2}$. Dokazati

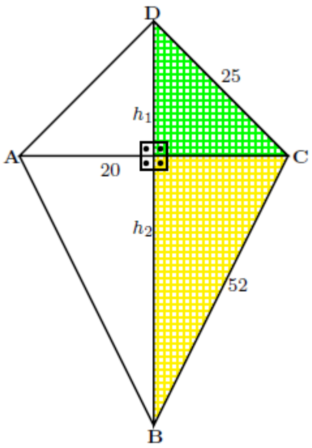
Rješenje:



Kako je $c = (a-r) + (b-r)$ slijedi $c = a + b - 2r$ ili $2r = a + b - c \implies r = \frac{a+b-2}{2}$, a važi i relacija $2(R+r) = a + b$.

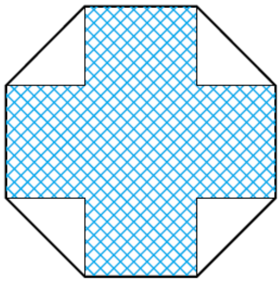
13. Deltoid čine dva jednakokraka trougla sa osnovicom 40 *cm* i kracima od 25 *cm*, odnosno 52 *cm*. Izračunati površinu deltoida.

Rješenje:



$$25^2 = h_1^2 + 20^2$$
$$h_1^2 = 625 - 400 = 225$$
$$h_1 = 15$$
$$52^2 = h_2^2 + 20^2$$
$$h_2^2 = 2704 - 400 = 2304$$
$$h_2 = 48\ cm$$
$$d_2 = h_1 + h_2 = 15 + 48 = 63\ cm$$
$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{40 \cdot 63}{2} = 1260\ cm^2$$

14. Izračunati površinu osjenčenog dijela pravilnog osmougla stranice 2 cm.



Rješenje:

Osjenčeni dio se sastoji od četiri pravougaonika i jednog kvadrata. Pravougaonici su dužine 2 cm i širine $\sqrt{2}$ cm. Prema tome, površina osjenčenog dijela je

$$P = 4 \cdot \left(1 + 2\sqrt{2}\right) cm^2$$

15. Da li postoji *n*- tougao kod koga je ukupan broj dijagonala za 2010 veći od broja stranica?

Rješenje:

Ukupan broj dijagonala *n*- tougla jednak je

$$\frac{n(n-3)}{2};$$

Iz uslova zadatka dobijamo jednakost:

$$\frac{n(n-3)}{2} = n + 2010 \Rightarrow \; n^2 - 3 \cdot n = 2 \cdot n + 4020$$
$$n^2 - 5n = 4020 \Rightarrow n(n-5) = 4020$$

Brojevi n i $n - 5$ daju isti ostatak pri dijeljenju sa 5, pa je proizvod djeljiv sa 25 ili nije djeljiv sa 5. Proizvod $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$ je djeljiv samo sa 5, pa jednačina $n(n-5) = 4020$ n nema cjelobrojno rješenje, odnosno takav mnogougao ne postoji.

16. Dat je pravougli trougao sa katetama dužina 6 cm i 8 cm. U krug koji je upisan u taj trougao, upisan je kvadrat. Izračunati površinu tako dobijenog kvadrata.

Rješenje:

Hipotenuza ovog trougla je 10 cm, a poluprečnik upisanog kruga je:

$$r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{8+6-10}{2} = 2\ cm$$

Površina kvadrata upisanog u ovaj krug je $P = 8\ cm^2$.

Proporcionalnost

1. Enes i Almir podijelili su $420\ KM$ u omjeru $13:8$. Koliko novca treba Enes dati Almiru da bi se omjer promijenio na $11:10$.
Rješenje:

Najprije izračunati koliko novca ima Enes, a koliko Almir. Rješavanjem jednačine
$13x + 8x = 420 \Rightarrow x = 20$ pa dobijemo da Enes ima $260\ KM$, a Almir $160\ KM$.
Da bi se promijenio omjer novca treba da Enes da Almiru y novca, pa je
$(260 - y):(160 + y) = 11:10$. Rješavanjem proporcije dobije se $y = 40$.

2. Marko i Josip imali su jednak broj klikera. U prvom krugu igre Marko je osvojio 6 Josipovih klikera a u drugom krugu Josip je osvojio $\frac{2}{3}$ svih klikera koje je u tom trenutku imao Marko. Nakon drugog kruga Josip je imao tačno 4 puta više klikera od Marka. Koliko je klikera imao svaki na početku, a koliko na kraju igre?
Rješenje:

Na početku su imali po 30 klikera, a na kraju igre Marko je imao 12 klikera, a Josip 48.

3. Riješi jednačinu: $\left(2\frac{3}{4} - 3\frac{2}{3}\right) : x = \left(\frac{11}{4} - \frac{11}{3}\right) : \frac{3}{2}$.
Rješenje:

$$x = \frac{3}{2}$$

4. Stranice trougla odnose se kao $a : b : c = 2 : 3 : 4$. Kolike su stranice tog trougla ako je obim rješenje jednačine $2x - 6 = 120$?
Rješenje:

$a : b : c = 2 : 3 : 4$
$a : b = 2 : 3 \Rightarrow a = \frac{2}{3}b$
$b : c = 3 : 4 \Rightarrow c = \frac{4}{3}b$
$2x - 6 = 120 \Rightarrow x = 63 -$ obim trokuta iz uvjeta zadatka
$O = a + b + c$

$63 = a + b + c$

$63 = \frac{2}{3}b + b + \frac{4}{3}b \Rightarrow b = 21$

$a = \frac{2}{3} \cdot 21 = 14$

$c = \frac{4}{3} \cdot 21 = 28$

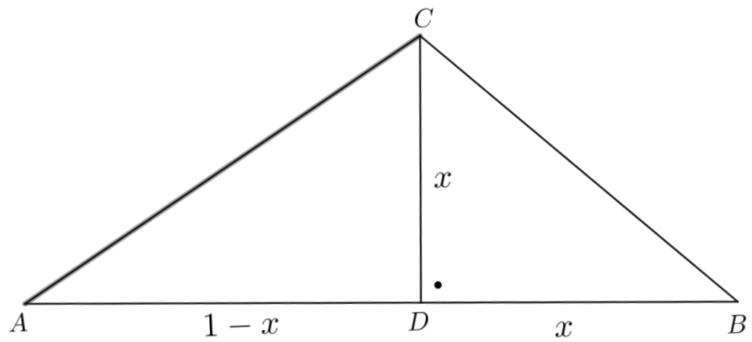
5. Uglovi trougla odnose se kao $2:3:7$ a dužina najveće stranice je 1. Odredi obim trougla približno na dvije decimale.

Rješenje:

$\alpha : \beta : \gamma = 2:3:7 \quad 180^\circ : (2+3+7) = 15^\circ$

$\alpha = 2 \cdot 15^\circ = 30^\circ$; $\beta = 3 \cdot 15^\circ = 45^\circ$ i $\gamma = 7 \cdot 15^\circ = 105^\circ$

Spustimo visinu na najveću stranicu $c = 1$. Pravougli trouglovi BCD i ACD su specijalni.



Iz $\Delta BCD \Rightarrow x^2 + x^2 = BC^2 \Rightarrow BC = x\sqrt{2}$.

Iz jednačine $1 - x = \sqrt{3}x \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \approx 0,37$

$BC = \sqrt{2}x = \sqrt{2}\frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \approx 0,52$

$AC = 2x = \sqrt{3} - 1 \approx 0,73$

$O \approx 2,25$

6. Jednakokraki trapez ima krak jednak osnovici i srednju liniju dugu $8cm$. Odredi dužinu njihovih stranica tako da obim trapeza bude $26cm$.

Rješenje:

$a = b$

$\frac{a+c}{2} = 8 \Rightarrow a + c = 16$

$O = a + 2b + c$

$26 = a + c + 2b$

$26 = 16 + 2b$

$2b = 10$

$b = 5$

$\left.\begin{array}{l} a = b = 5 \\ a + c = 16 \end{array}\right\} \Longrightarrow c = 11$

7. Određeni posao 15 radnika može obaviti posao za 6 dana. Nakon 2 dana rada 3 radnika napuste posao. Za koliko će se produžiti taj posao?

Rješenje:

15 radnika bi nakon dva dana posao trebali završiti za četiri dana.

$$\begin{array}{ll} \downarrow 15 \text{ radnika} & 4 \text{ dana} \downarrow \\ 12 \text{ radnika} & x \text{ dana} \end{array}$$

$$12 : 15 = 4 : x \Longrightarrow x = 5$$

12 radnika će posao raditi pet dana, dakle jedan dan duže.

8. Netko je primio radnika na posao na godinu dana i za to mu unaprijed platio 12 rubalja i kaput. Nakon sedam mjeseci radnik je odlučio otići, ali zadržati kaput. To je i učinio i otišao kući s 5 rubalja i kaputom. Kolika je cijena kaputa ?

Rješenje:

Budući da je za jednu godinu radnik trebao dobiti 12 rubalja, to je za mjeseci zaradio 7 rubalja i $\frac{7}{12} \cdot x$, gdje je x cijena kaputa. Budući da je od zarađenih 7 rubalja ostalo 5, to je neisplaćeni dio cijene kaputa 2 rublje. Dakle, $\frac{5}{12} \cdot x = 2$, odakle je $x = \frac{24}{5}$ odnosno $x = 4.8$ rubalja.

Ili rješenje jednačine: $\frac{7}{12}(x + 12) = x + 5 \Longrightarrow x = \frac{24}{5} = 4.8$

9. Udaljenost između dva mjesta putnik je planirao prijeći u četiri dana, tako da se dužine dnevno prijeđnih etapa odnose kao $6 : 4 : 3 : 7$. Neposredno prije puta promjenio je plan odlučivši posljednju etapu smanjiti za $9.75km$. Zbog te se promjene dužine etapa odnose kao $6 : 4 : 3 : 2$. Koliko je dug put?

Rješenje:

Označimo sa s dužinu puta . Putnik je trebao preći za :

I dan $\frac{6}{20}$ puta s ($\frac{6}{20}$ s)

II dana $\frac{4}{20}$ s

III dan $\frac{3}{20}$ s

IV dana $\frac{7}{20}$ s

Izmjenom plana:

I dan $\frac{6}{15}$ s

II dana $\frac{4}{15}$ s

III dana $\frac{3}{15}$ s
IV dana $\frac{2}{15}$ s
$\frac{2}{15}s + 9.75 = \frac{7}{20}s$
$s = 45\ km$

Put je dug 45 km
I plan : $13.5\ km\ +\ 9\ km\ +\ 6.75\ km\ +\ 15.75\ km$
II plan : $18\ km\ +\ 12\ km\ +\ 9\ km\ +\ 6\ km$

10. Jedna brigada traktorista mogla bi završiti oranje za 15 dana, a druga brigada bi to uradila za 10 dana. Za koliko bi dana taj posao uradile obje brigade zajedno?
Rješenje:

Jedna brigada bi za jedan dan uradila $\frac{1}{15}$ posla a druga za jedan dan $\frac{1}{10}$ posla. Ako rade obje zajedno onda će posao završiti za x dana.
Imamo
$\frac{x}{15}+\frac{x}{10} = 1 \ \Rightarrow x = 6$
Obje brigade zajedno bi posao završile za 6 dana.

11. 12 radnika urade neki posao za 8 dana radeći po 10 sati dnevno. Za koliko dana će taj isti posao uraditi 16 radnika radeći dnevno po 6 sati?
Rješenje:

Na posao je utrošeno ukupno $12 \cdot 8 \cdot 10$ sati rada a to je 960 sati. 16 radnika radeći po 6 sati dnevno odrade 96 radnih sati za jedan dan. Stoga zaključujemo da je timu od 16 radnika uz radno vrijeme od 6 sati potrebno 10 dana za dati posao.

12. 12 radnika treba obaviti neki posao. Oni ga mogu završiti za 42 dana. Nakon tri dana otišla su 4 radnika. Nakon sljedećih 6 dana dođe 7 novih radnika. A zatim nakon sljedećih 5 dana došlo je novih 8 radnika, koji su zajedno s radnicima koje su zatekli završili posao.Za koliko je dana cijeli posao završen?
Rješenje:

Broj dnevnica koje se moraju dogoditi je $42 \cdot 12 = 504$. Prva tri dana odrađeno je $3 \cdot 12 = 36$ dnevnica pa ih je ostalo još da se odradi $504 - 36 = 468$.
Nakon tri dana radi 8 radnika i u tom sastavu rade 6 dana $8 \cdot 6 = 48$.
Još je preostalo $468 - 48 = 420$ dnevnica da se odradi. Sad dolazi 7 radnika pa ih ima 15.
Rade 5 dana, $15 \cdot 5 = 75$
$420 - 75 = 345$

Dolazi novih 8 radnika i završavaju posao skupa sa 15 starih radnika.
$15 + 8 = 23$ a $345 : 23 = 15$; $15 + 5 + 6 + 3 = 29$ $\Longrightarrow$ Posao je završen za 29 dana.

13. Odredi nepoznate veličine iz uslova: $x+y+z+t=110$ i $x:y:z:t=1:2:5:3$
Rješenje:

Iz druge jednačine smjenom biće $x=k\ \ y=2k\ \ z=5k\ \ \ t=3k$, to uvrstimo u prvu jednačinui dobijemo $k=10$, vraćanjem smjene biće $x=10, y=20, z=50, t=30$.

14. Prodavnica proda $\frac{2}{5}$ komada platna jednom kupcu, a drugom kupcu $\frac{1}{3}$ ostatka. Za prodato platno primi $120KM$.Koliko bi primila da je predala cijeli komad platna?
Rješenje:

$$\frac{2}{5}x+\frac{1}{3}\left(x-\frac{2}{5}x\right)=\frac{2}{5}x+\frac{1}{3}x\frac{5x-2x}{5}=\frac{2}{5}x+\frac{1}{3}\cdot\frac{3x}{5}=\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}x=\frac{3}{5}x$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \frac{3}{5}x & 120KM \uparrow \\ & x & a \end{array}$$

$$\frac{3}{5}x : x = 120 : a \Longrightarrow a = 200KM$$

15. Dužine kateta pravouglog trougla jesu $5cm$ i $12cm$. Izračunati obim i površinu sličnog trougla ako je koeficjent sličnosti 15.
Rješenje:

$a=15cm$ $\quad O=a+b+c$ $\quad P=\frac{a\cdot b}{2}$

$b=12cm$ $\quad O=5+12+13$ $\quad P=\frac{5\cdot 12}{2}$

$c^2=a^2+b^2$ $\quad O=30cm$ $\quad P=30cm^2$

$c^2=25+144$

$c^2=169$

$c=13cm$

$\frac{a_1}{a}=1.5$ $\quad b_1=1.5\cdot b$ $\quad c_1=1.5\cdot c$

$a_1=1.5\cdot a$ $\quad b_1=12\cdot 1.5$ $\quad c_1=1.5\cdot 13$

$a_1=7.5cm$ $\quad b_1=18cm$ $\quad c_1=19.5cm$

$O_1=a_1+b_1+c_1$ $\quad P_1=\frac{a_1\cdot b_1}{2}$

$O_1=7.5+18+19.5$ $\quad P_1=\frac{7.5\cdot 18}{2}$

$O_1=45cm$ $\quad P_1=67.15cm^2$

$P_1+2P_2=80$

$4\cdot 4+2\big(4\cdot(a-4)\big)=80 \Rightarrow a=12cm$

16. Četiri dana, četiri mačke ulove četiri miša. Za koliko će dana 50 mačaka uloviti 100 miševa?

Rješenje:

$$\begin{array}{l|l|l} 4m & 4d & \uparrow\ 100m \\ 150m \downarrow & x & 100m \end{array}$$

$4{:}\,50 = x{:}\,100 \;\Rightarrow x = 8$

17. Broj 182 razdijeli na dva dijela koji se odnose $2{:}\,5$. Koji su to brojevi i za koliko je jedan veći od drugog?

Rješenje:

$x + y = 182 \;\Rightarrow 2x + 2y = 364$

$x{:}\,y = 2{:}\,5$

$$\left.\begin{array}{l} 5x = 2y \\ 2x + 2y = 364 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} 2x + 5x = 364 \\ x = 52 \end{array}$$

$5 \cdot 52 = 2y \;\Rightarrow y = 130$

$y - x = 130 - 52 = 78$

18. Drugovi Samir, Jamin i Zlatan igrali su sportsku prognozu i upatili su; Samir 60, Jasmin 80 i Zlatan $120KM$. Kako će podijeliti zajednički dobitak od $13065KM$?

Rješenje:

S – $60\ KM$

J – $80\ KM = \dfrac{80}{60} \cdot S = \dfrac{4}{3}S$

Z – $120\ KM = 2S$

$$\begin{array}{lll} S + J + Z = 13065 & & \\ S + \frac{4}{3}S + 2S = 13065 & J = \frac{4}{3} \cdot S & Z = 2 \cdot S \\ 3S + 4S + 6S = 39195 & J = \frac{4}{3} \cdot 3015 & Z = 2 \cdot 3015 \\ 13S = 39195 & J = 4020 & Z = 6030 \\ S = 3015 & & \end{array}$$

19. Dvanaest hljebova podijeljeno je na 12 osoba. Svaki muškarac dobio je po 2 hljeba, žena po $\frac{1}{2}$ hljeba, a dijete po $\frac{1}{4}$ hljeba. Koliko je bilo muškaraca, koliko žena, a koliko djece?

Rješenje:

Muškaraca ima 5, 6 djece i 1 žena.

20. Ako za brojeve a, b i c vrijedi $a: b = 4: 3$, $b: c = 2: 5$ odrediti vrijednost izraza $(3a - 2b): (b + 2c)$.

Rješenje:

$(3a - 2b): (b + 2c) = 1: 3$

21. Razlika, zbir i proizvod dva broja odnose se kao $1: 4: 15$. Koji su to brojevi ?

Rješenje:

Ti brojevi su 10 i 6.

22. Svaki od šest kamiona jedne građevinske kompanije je vozio 8 sati i svi zajedno su za to vrijeme potrošili 720 litara nafte. Koliko će nafte potrošiti devet kamionate kompanije ako svaki od njih vozi po 6 sati? (Podrazumijeva se da je potrošnja goriva ravnomjerna po kamionima i po satima vožnje.)

Rješenje:

Devet kamiona, vozeći po šest sati, ukupno će potrošiti $810l$ nafte.

23. Petorica radnika obavili su neki posao i ukupno zaradili $2100KM$. Novac su podijelili tako da su prva dvojica dobili $\frac{2}{5}$ dijela ostale trojice. Prvi i drugi radnik su svoj dio podijelili u omjeru $3: 2$, a treći, četvrti i peti radnik svoj dio u omjeru $3: 5: 4$. Koliko je dobio svaki radnik?

Rješenje:

Radnici su redom dobili $3600KM, 2400KM, 3750KM, 6250KM$ i $5000KM$.

24. Alma, Buco i Ceca treba da podijele $2000KM$ tako da se dijelovi koje dobiju Alma i Buco odnose kao $2: 3$, a dijelovi koje dobiju Buco i Ceca kao $9: 5$. Odredi koliko će svako od njih dobiti.

Rješenje:

$A = 600KM, B = 900KM, C = 500KM$

25. Putnici A i B pođu jedan drugom u susret i sretnu se posle 4 sata. Da su obojica prelazili na sat po pola kilometra više sreli bi se poslije $3\frac{3}{5}$ časova. A ako bi jednovremeno krenuli istim pravcen, A iza B, tek poslije 6 časova bi se odstojanje između njih smanjilo za $\frac{1}{6}$.
a) Kolika je brzina svakog putnika?
b) Kolika je bila razdaljina između njih u početku ?
Rješenje:

Pješak A prelazio je $5\frac{km}{h}$, a pješak B je prelazio $4\frac{km}{h}$.
Rastojanje u početku između njih bilo je $36km$.

26. Na pijaci jedan prodavac ima lubenice, dinje i klipove mladog kukuruza i prodaje ih na komad. Ukupan broj lubenica, dinja i klipova mladog kukuruza je 239. Jedan je kupac kupio $\frac{2}{3}$ svih lubenica, $\frac{3}{5}$ svih dinja i $\frac{5}{7}$ svih klipova mladog kukuruza. Drugi kupac je kupio $\frac{1}{13}$ svih lubenica, $\frac{1}{4}$ svih dinja i $\frac{1}{5}$ svih klipova mladog kukuruza. Koliko je ukupno komada svega kupio drugi kupac i koliko je prodavac imao na početku lubenica, dinja i klipova mladog kukuruza?
Rješenje:

Prodavač je na početku imao 39 lubenica, 60 dinja i 140 klipova mladog kukuruza. Drugi kupac je kupio ukupno 46 komada i to 3 lubenice, 15 dinja i 28 klipova mladog kukuruza.

27. Dva radnika mogu da završe posao za 24 dana. Poslije zajedničkog rada od 10 dana jedan radnik napušta posao, pa drugi radnik radi sam i završi taj posao za 25 dana. Za koliko bi dana taj posao završio svako od njih ako bi radio sam?
Rješenje:

Poslije 10 dana radnici su uradili $\frac{10}{24}=\frac{5}{12}$ posla. $\frac{7}{12}$ ostatka posla drugi radnik je završio za 35 dana tj. svakog dana je završavao $\frac{7}{12}:35=\frac{1}{60}$ posla. Drugi radnik bi cio posao završio za 60 dana. Za 24 dana drugi radnik uradi $\frac{24}{60}=\frac{2}{5}$ posla, a prvi $\frac{3}{5}$ posla. Prvi radnik za 1 dan uradi $\frac{3}{5}:24=\frac{1}{40}$ odnosno cio posao bi uradio za 40 dana.

28. Zlatar ima dvije različite legure zlata i srebra. U jednoj su srebro i zlato u razmjeri $2:3$, a u drugoj su u razmjeri $5:3$. Koliko kg svake legure treba uzeti da bismo dobili $9kg$ nove legure u kojoj ima jednako zlata i srebra.
Rješenje:

masa prve legure x
masa druge legure $9-x$
srebra u prvoj leguri ima $\frac{2}{5}x$
srebra u drugoj leguri $\frac{5(9-x)}{8}$
$\frac{2x}{5}+\frac{5(9-x)}{8}=\frac{9}{2} \Leftrightarrow x=5 \Rightarrow$ prva legura$=5kg$; druga legura$=4kg$

Koordinatni sistem

1. Zadat je trougao ΔABC tačkama $A(0,0)$, $B(-3,4)$, $C(1,7)$. Dokazati da je trougao pravougli. Izračunati obim i površinu tog trougla na jednu decimalu.

Rješenje:

$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} =$

$= \sqrt{(-3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$BC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} =$

$= \sqrt{(1+3)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

$AC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} =$

$= \sqrt{(1-0)^2 + (7-0)^2} =$

$= \sqrt{1+49} = \sqrt{50} =$

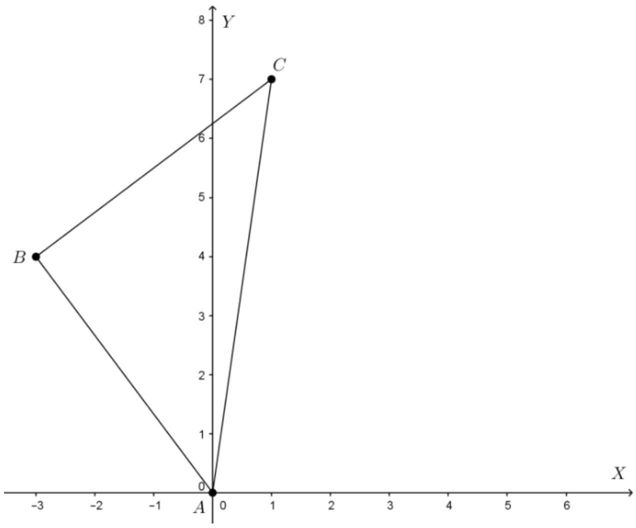
$= \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$\left(5\sqrt{2}\right)^2 = 5^2 + 5^2$

$50 = 25 + 25$

$50 = 50 \implies$ trougao je pravougli



$O = AB + BC + AC \implies O = 21$

$P = \frac{AB \cdot BC}{\mathbf{2}} \implies P = \frac{25}{2}$

Zadaci za deveti razred

Algebarski izrazi

Linearna funkcija

Jednadžbe

Sistem linearnih jednadžbi

Nejednakosti i nejednadžbe

Prosti i složeni brojevi. Djeljivost

Trougao i četverougao. Mnogougao

Racionalni izrazi

Analitička geometrija

U rukopisima Egipćana i Vavilonaca nalazimo primjere rješavanja jednadžbi. Egipćani su imali poseban znak (hijeroglif) i ime za nepoznatu veličinu i zvali su je ***hau****, što znači* ***hrpa****,* ***gomila****. Kod indijaca nepoznata se nazivala* ***ša*** *što znači* ***stvar****. U nekim rukopisima nepoznate veličine su označavane pomoću boja. U Rajndovom[9]papirusu se nalazi zadatak koji je iskazan riječima te se tako i rješava:*

Gomila, računata dva puta zajedno, sa još jednom gomilom, dostiže devet. Koje je ime te gomile?(2x+x=9)

Zadaci na Rajndovom papirusu se odnose na praktične probleme iz oblasti građevinarstva, ekonomije i slično.

Neki radnik mora za transport hljeba iz pekare koristiti korpe, veće u koje može stati pet hljebova i manje sa četiri hljeba. Koliki će se rad izvršiti u oba slučaja?

Nije jasno kako su Egipćani i Vavilonci došli do rješenja navedenih i sličnih problema. Najvjeroatnije da se zadatak, koji je bio iz svakodnevnog života, rješavao mnogo puta sve dok se ne bi dobilo rješenje koje je odgovaralo realnosti. Redoslijed računskih operacija koji dovodi do tačnog rezultata postaje ***radno pravilo****. Ovi postupci niu bili racionalni, ali u ono vrijeme su bili jedini način da se dođe do potrebnog rješenja. Iako*

[9] **Ahmesov papirus** je staroegipatski papirus koga je 1858. Godine u oblasti Tebe pronašao Aleksandar Henri Rajnd, škotski krijumčar egipatskih relikvija, zbog čega se često spominje kao **Rajndov papirus**. Papirus je pisan oko 1650 g. p. n. e., ali je u uvodu papirusa Ahmes zapisao da prepisuje sa jednog još starijeg papirusa koji datira oko 1850 g. p. n. e. ne spominjujući ime prethodnog autora. Sa jedne strane papirusa opisano je dijeljenje broja 2 sa neparnim brojevima od 3 do 101, tj. prikazano je kako se razlomci sa brojem 2 mogu razložiti na jedinične razlomke. Sa druge strane papirusa je prikazano 87 problema i zadataka. Ovaj papirus se smatran najznačajnijim i najvrijednijim matematičkim dokumentom Egipatske civilizacije.

rješaanje jednadžbi nije bilo racionalno, saznanja Egipćana o jednadžbama predstavljaju osnovu za dalju izgradnju algebarske metode rješavanja jednadžbi.

Algebarski izrazi

1. Izračunati vrijednost algebarskog izraza $\left[\frac{(a+b)^3}{3ab}-(a+b)\right]:\left[1+\frac{(a-b)^2}{ab}\right]=$.

Rješenje:

$$\left[\frac{(a+b)^3}{3ab}-(a+b)\right]:\left[1+\frac{(a-b)^2}{ab}\right]=$$
$$=\left[\frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-3a^2b-3ab^2}{3ab}\right]:\left[\frac{ab+a^2-2ab+b^2}{ab}\right]=$$
$$=\frac{a^3+b^3}{3ab}:\frac{a^2-ab+b^2}{ab}=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{3ab}:\frac{a^2-ab+b^2}{ab}=\frac{a+b}{3}$$

2. Ako je $\frac{x-2y}{2x+y}=3$, koliko je $\frac{x+3y}{3x-y}$?

Rješenje:

$$x-2y=3(2x+y)\ \Rightarrow x-2y=6x+3y \Rightarrow\ -5x=5y\ \Rightarrow x=-y$$
$$\frac{x+3y}{3x-y}=\frac{-y+3y}{-3y-y}=\frac{2y}{-4y}=-\frac{1}{2}$$

3. Ako je $\frac{b}{a}=\frac{2}{3},\frac{c}{b}=\frac{3}{4}$, koliko je $\frac{a+b+c}{a-b-c}$?

Rješenje:

Iz $a:b:c = 6:4:3$, slijedi $a = 6k, b = 4k$ i $c = 3k$

$$\frac{a+b+c}{a-b-c}=\frac{6k+4k+3k}{6k-4k-3k}=\frac{13}{-1}=-13$$

4. Ako je $\frac{x}{y}+x=\frac{y}{x}+y, x\neq y$, koliko je $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$?

Rješenje:

Zadanu jednakost pišemo u obliku

$$\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=y-x\ \Rightarrow\ \frac{x^2-y^2}{xy}=y-x\ \Rightarrow\ \frac{(x+y)(x-y)}{xy}=y-x\ \Rightarrow\ \frac{x+y}{xy}=-1 \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=-1$$

5. Za koje vrijednosti promjenljivih x i y razlomak $R = \frac{3x^2+3y^2-12x+17}{x^2+y^2-4x+5}$ ima najveću vrijednost i koliko ona iznosi?

Rješenje:

$$R = \frac{3x^2 + 3y^2 - 12x + 17}{x^2 + y^2 - 4x + 5} = \frac{3x^2 - 12x + 12 + 3y^2 + 3 + 2}{x^2 - 4x + 4 + y^2 + 1} =$$
$$= \frac{3[(x-2)^2 + y^2 + 1]}{(x-2)^2 + y^2 + 1} + \frac{2}{(x-2)^2 + y^2 + 1} =$$
$$= 3 + \frac{2}{(x-2)^2 + y^2 + 1}$$

Vrijednost razlomka je tim veća ako je nazivnik što manji, pa $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ i $y = 0$. Najveća vrijednost razlomka iznosi $R = 3 + \frac{2}{0+0+1} \Rightarrow R = 5$

6. Skratiti razlomak:

$$P(x) = \frac{(a^2 + b^2)x + ab(x^2 + 1)}{(a^2 - b^2)x + ab(x^2 - 1)},$$

pa zatim riješiti jednačinu $P(x) = 2$.

Rješenje:

a) $P(x) = \frac{(a^2+b^2)x+ab(x^2+1)}{(a^2-b^2)x+ab(x^2-1)} = \frac{a^2x+b^2x+abx^2+ab}{a^2x-b^2x+abx^2-ab} = \frac{ax(a+bx)+b(a+bx)}{ax(a+bx)-b(a+bx)} = \frac{(a+bx)(ax+b)}{(a+bx)(ax-b)} = \frac{ax+b}{ax-b}$;

b) $x = \frac{3b}{a}$.

7. Uprostiti izraz:

$$\left(\frac{x-1}{x^2+x-2} - \frac{x+2}{x^2-4}\right) : \frac{4}{4-x^2};$$

Rješenje:

R: 1

8. Izračunati:

$$\frac{1}{3240} \cdot \left[\frac{1250^2 + 950^2 - 1900 \cdot 1250}{10\sqrt{275^2 - 225^2}}\right]^2.$$

Rješenje:

$$\frac{1}{3240} \cdot \left[\frac{1250^2+950^2-1900\cdot 1250}{10\sqrt{275^2-225^2}}\right]^2 = \frac{1}{3240} \cdot \left[\frac{(1250-950)^2}{10\sqrt{(275-225)(275+225)}}\right]^2 = \frac{1}{3240} \cdot \left[\frac{300^2}{10\sqrt{50\cdot 500}}\right]^2 = \frac{1}{3240} \cdot \left[\frac{900}{5\sqrt{10}}\right]^2 = 1.$$

9. Odredit x, y $(x, y \in N)$, takve da je $xy - 4x - 2y - 27 = 0$. Odrediti minimalnu i maksimalnu vrijednost broja $x + y$.

Rješenje:

$$xy - 4x - 2y + 8 - 35 = 0$$

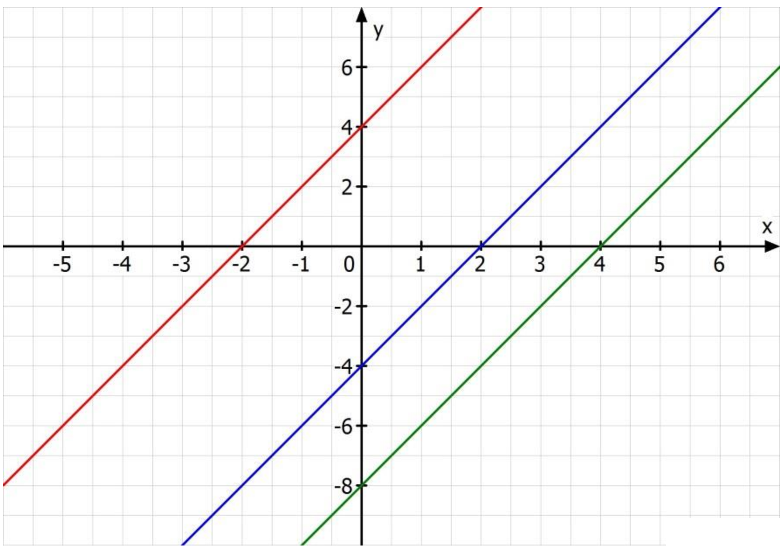
$x(y-4) - 2(y-4) = 35$
$(x-2)(y-4) = 35$
$(x, y) \in \{(3,39), (7,11), (9,9), (37,5)\}$.
Broj $x + y$ ima sledeće vrijednosti $42, 18, 18$ i 42 pa je minimum 18 a maksimum 42.

Linearna funkcija

1. Data je funkcija $y = (2m + 1)x + 6$. Odrediti vrijednost parametra m tako da njen grafik sadrži tačku $A(4, 3)$. Za takvu vrijednost parametra m izračunati udaljenost koordinatnog početka od grafika funkcije.
Rješenje:

Kako grafik prolazi tačkom A imamo $3 = (2m + 1) \cdot 4 + 6 \Longrightarrow m = -\frac{7}{8}$. Za takvu vrijednost parametra m, funkcija ima oblik $y = -\frac{3}{4}x + 6$. Nula funkcije je $x = 8$, pa grafik siječe $x -$ osu i $y -$ osu redom u tačkama $B(8, 0)$ i $C(0, 6)$. Odsječci na x i y osi su $a = 6$ i $b = 8$. Površina trougla kojeg grafik gradi sa koordinatnim osama iznosi $P = \frac{ab}{2} \Longrightarrow P = 24$. Dužina hipotenuze c (duži BC) iznosi $c = 10$. Ako najkraće rastojanje grafika funkcije od koordinatnog početka označimo sa x, imamo $P = \frac{cx}{2} \Longrightarrow x = 4.8$.

2. U linearnoj funkciji $y = (3m + 2)x + 2k - m$ nađi m i k tako da grafik bude paralelan sa pravom $2x - y - 8 = 0$ i da površina trougla, koji grafik gradi sa koordinatnim osama, bude četiri puta manji od površine trougla kojeg gradi prava $2x - y - 8 = 0$ sa koordinatnim osama.
Rješenje:



Iz paralelnosti slijedi $3m + 2 = 2 \Longrightarrow m = 0$, a funkcija dobija oblik $y = 2x + 2k$. Prava

$2x - y - 8 = 0$ presjeca koordinatne ose u tačkama -4 i 8 i površina trougla kojeg ona gradi je 16. Slijedi da naša prava gradi na osi Ox odsječak dužine 2,a na osi Oy odsječak dužine 4. Postoje dva rjršenja $y = 2x + 4$ i $y = 2x - 4$. Površina trougla je 4.

3. Date su linearne funkcije $f(x) = (2m - 0.5)x - 3$ i $g(x) = (7m + 2)x - 4$.
Odrediti vrijednost realnog broja m tako da:
a) grafici funkcija budu paralelni
b) $f(x)$ bude opadajuća, a $g(x)$ rastuća funkcija.
Rješenje:

a) Da bi prave bile paralelne mora biti $2m - 0.5 = 7m + 2 \Rightarrow m = -0.5$
b) Iz uslova $2m - 0.5 < 0$ i $7m + 2 > 0$ dobija se da je $-\frac{2}{7} < m < \frac{1}{4}$.

4. Odrediti vrijednost funkcije $f(x, y) = x^{2016} + 2016y$ ako vrijedi
$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 10 = 0$.
Rješenje:

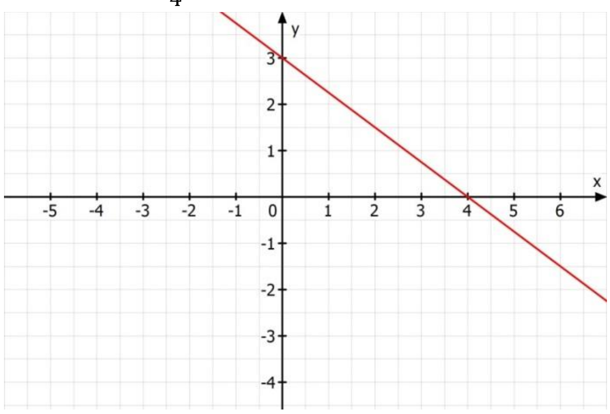
Iz $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 10 = 0 \Rightarrow (x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \wedge y = 3$
Sada imamo da je $f(-1, 3) = (-1)^{2016} + 2016 \cdot 3 = 6049$.

5. Data je funkcija $y = \left(m + \frac{1}{4}\right)x + (1 - 2m)$. Odrediti vrijednost parametra m tako da grafik funkcije prolazi tačkom $A(-4, 6)$, a zatim izračunati površinu trougla koju grafik funkcije gradi sa koordinatnim osama.
Rješenje:

Ako tačka A pripada grafiku funkcije onda koordinate imaju vrijednost $x = -4$ i $y = 6$.
Uvrštavanjem koordinata u funkciju dobijamo vrijednost parametra m, tj.

$$6 = \left(m + \frac{1}{4}\right) \cdot (-4) + (1 - 2m) \Rightarrow m = -1$$

Sada naša funkcija ima oblik $y = -\frac{3}{4}x + 3$.



Funkcija siječe $x -$ osu u apscisi $x = 4$, a $y -$ osu u ordinati $y = 3$, pa je trougao koji grafik gradi sa koordinatnim osama pravougli sa dužinama kateta 3 i 4 i površina je $P = \frac{3 \cdot 4}{2} \Rightarrow P = 6$

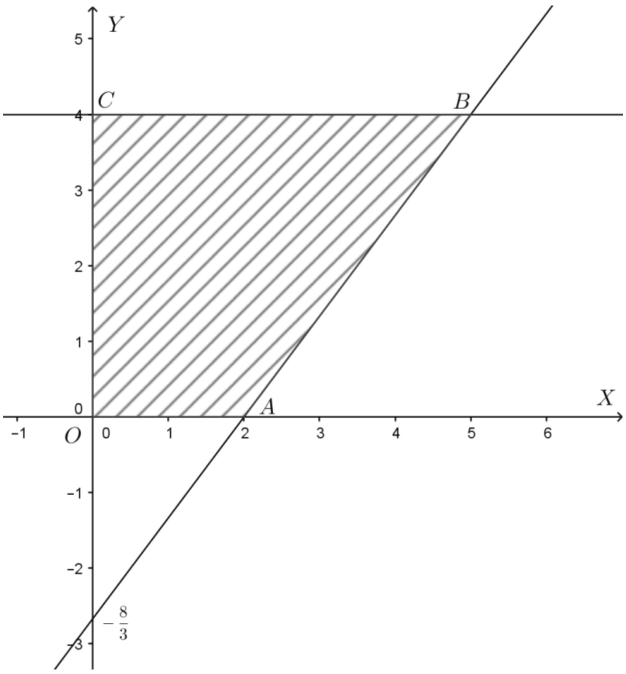
6. Za koju vrijednost parametra m se pravci $2x - y + 3 = 0$, $x + y + 3 = 0$ i $mx + y - 13 = 0$ sijeku u jednoj tački?

Rješenje:

Trebamo odrediti presjek S prvia dva pravca, to je $S(-2, 1)$. Ta tačka mora pripadati i trećem pravcu, pa dobivamo $m = -7$.

7. Odrediti površinu lika omeđenog pravama $4x - 3y - 8 = 0$ i $y = 4$ te pozitivnim dijelom koordinatnog sistema.

Rješenje:

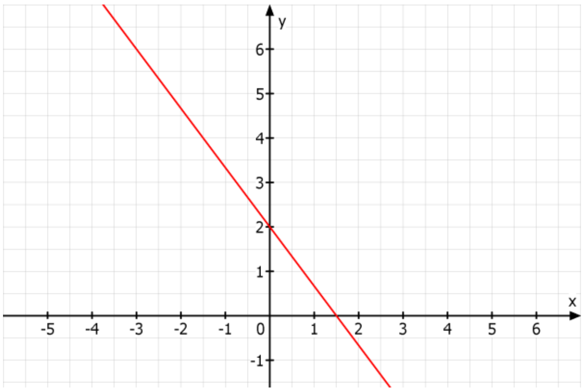


$$P_{OABC} = \frac{OA + BC}{2} \cdot OC = \frac{2 + 5}{2} \cdot 4 = 14$$

8. Zadana je prava jednačinom $4x + 3y - 6 = 0$. Kolika je udaljenost koordinatnog početka od prave?

Rješenje:

Napišemo jednačinu prave u eksplicitnom obliku $y = -\frac{4}{3}x + 2$ i nacrtamo grafik odgovarajuće linearne funkcije



Nula ove funkcije je $x_0 = \frac{3}{2}$. Duzine stranica pravouglog trougla kojeg grafik ove funkcije gradi sa koordinatnim osama su: $a = \frac{3}{2}, b = 2$ i $c = \frac{5}{2}$. Površina pravouglog trougla je

$$P = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{\frac{3}{2} \cdot 2}{2} = \frac{3}{2}$$

Ako sa x označimo rastojanje koordinatnog početka od date prave, imamo da površinu trougla možemo izračunati i kao

$$P = \frac{c \cdot x}{2} \Rightarrow c \cdot x = 2 \cdot P$$

$$x = \frac{2 \cdot P}{c} = \frac{2 \cdot \frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{6}{5}$$

9. Data je funkcija $y = (2m + 1)x + 6$.

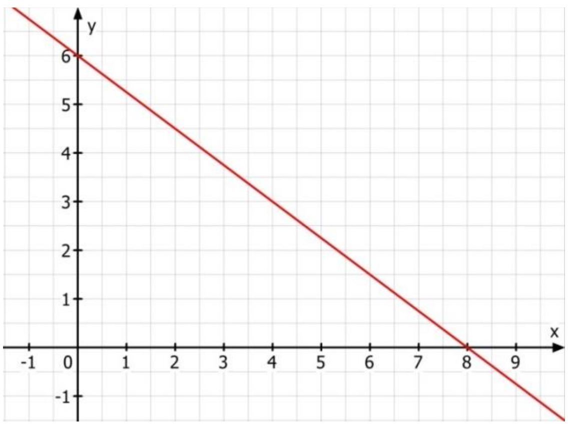
a) Odrediti vrijednost broja m tako da njen grafik sadrži tačku $M(4, 3)$.

b) Za tu vrijednost broja m odrediti udaljenost koordinatnog početka od tog grafika

Rješenje:

a) $y = (2m + 1)x + 6 \implies 3 = (2m + 1) \cdot 4 + 6 \implies m = -\frac{7}{8}$

b) Jednačina prave je $y = -\frac{3}{4}x + 6$.



Dužine stranica pravouglog trougla kojeg grafik ove funkcije gradi sa koordinatnim osama su: $a = 8$, $b = 6$ i $c = 10$. Površina pravouglog trougla je

$$P = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24$$

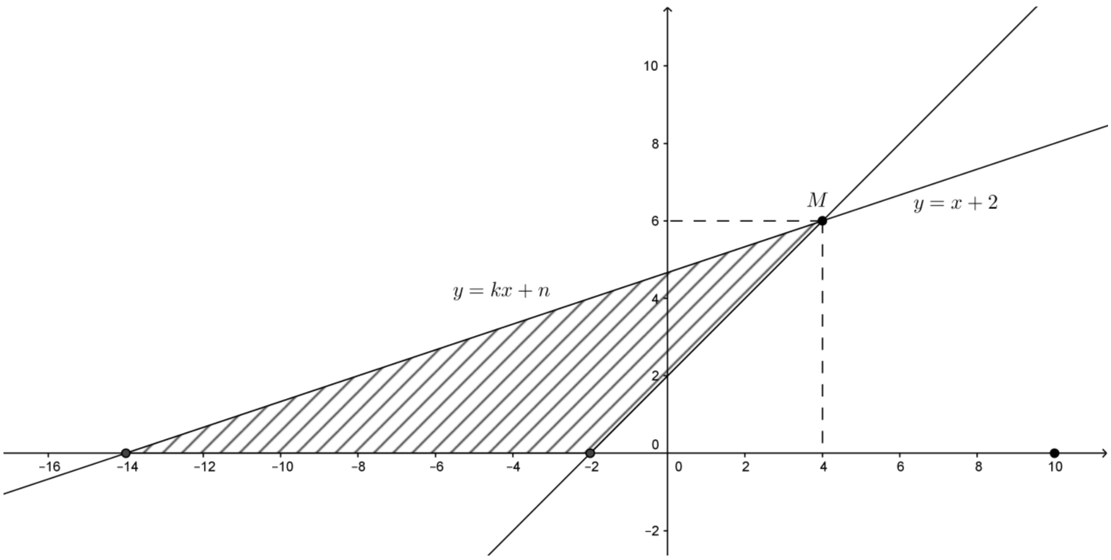
Ako sa x označimo rastojanje koordinatnog početka od date prave, imamo da površinu trougla možemo izračunati i kao

$$P = \frac{c \cdot x}{2} \Rightarrow c \cdot x = 2 \cdot P$$

$$x = \frac{2 \cdot P}{c} = \frac{2 \cdot 24}{10} = \frac{24}{5}$$

10. Odredi sve parove realnih brojeva k i n, takve da grafik funkcije $y = kx + n$ sadrži tačku $M(4, 6)$ i sa grafikom funkcije $y = x + 2$ i x osom gradi trougao površine 36.

Rješenje:



Tačka $M(4, 6)$ pripada i grafiku funkcije $y = x + 2$ i grafiku funkcije $y = kx + n$, pa je ona tjeme trougla koji grade ti grafici i x osa. Onda je dužina visine trougla iz tjemena M jednaka 6. Kako je površina trougla jednaka 36, slijedi da je dužina odgovarajuće stranice 12. Jedan kraj te stranice je u tački $(-2, 0)$, pa će drugi biti ili u $A(10, 0)$ ili $B(-14, 0)$. Grafik funkcije $y = kx + n$ sadrži ili tačke M i A ili M i B. U prvom slučaju iz sistema

$$\left.\begin{aligned} 6 &= 4k + n \\ 0 &= 10k + n \end{aligned}\right\}$$

dobijamo $k = -1$ i $n = 10$. U drugom slučaju iz sistema

$$\left.\begin{aligned} 6 &= 4k + n \\ 0 &= -14k + n \end{aligned}\right\}$$

dobijamo $k = \frac{1}{3}$ i $n = \frac{14}{3}$.

11. Date su funkcije $f(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$ i $g(x)=\frac{x+1}{4}$. Za koju vrijednost promjenljive x je $f\big(g(x)\big)+2g\big(f(x)\big)=0$

Rješenje:

$$\left.\begin{aligned} f\big(g(x)\big)&=\frac{\frac{x+1}{4}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{x+1}{8}-\frac{1}{2}=\frac{x-3}{8}\\ g\big(f(x)\big)&=\frac{\frac{x}{2}-\frac{1}{2}+1}{4}=\frac{\frac{x+1}{2}}{4}=\frac{x+1}{8}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{x-3}{8}+2\cdot\frac{x+1}{8}=0\Rightarrow x=\frac{1}{3}$$

12. U funkciji $f(x)=(a-2)x-a+5$ odrediti:

a) parametar a tako da grafik funkcije odsjeca na pozitivnom smjeru y −ose dužinu od $4cm$;

b) dužinu odsječka na x −osi;

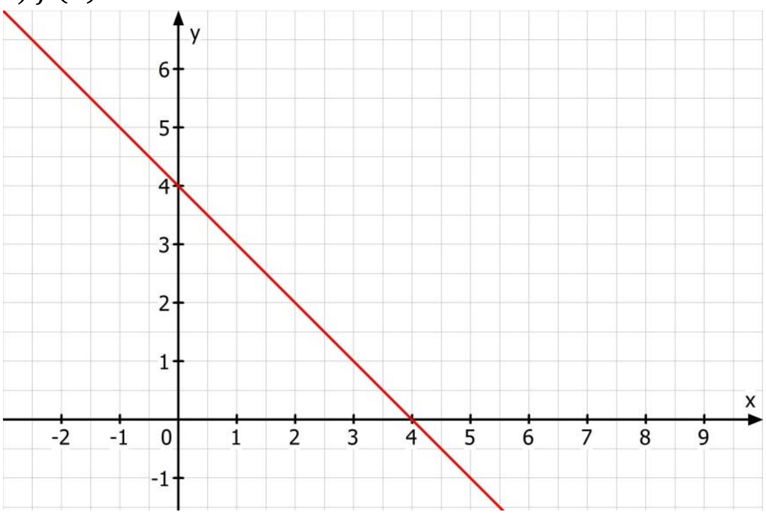
c) površinu odsječka dobijene prave i osa koordinatnog sistema.

Rješenje:

a) $\left.\begin{aligned} n&=4\\ n&=-a+5\end{aligned}\right\}\Rightarrow -a+5=4\Rightarrow a=5-4\Rightarrow a=1$

b) $-\frac{n}{k}=-\frac{-a+5}{a-2}\overset{a=1}{=}-\frac{-1+5}{1-2}=-\frac{4}{-1}=4$

c) $f(x)=-x+4$



− odsječak koji prava gradi sa koordinatnim osama je jednakokraki - pravougli trougao sa dužinom katete 4, pa je njegova površina

$$P=\frac{4\cdot 4}{2}\Rightarrow P=8$$

13. Date su funkcije $f(x) = -3x + 1$; $g(x) = \frac{4}{3}x + 2\frac{1}{3}$ i $h(x) = -2x + 7$. Riješiti jednačinu $g\Big(h\big(f(x)\big)\Big) = -h\big(g(x)\big)$.

Rješenje:

$$g\Big(h\big(f(x)\big)\Big) = g[-2 \cdot (-3x + 1) + 7] = g(6x + 5) = \frac{4}{3} \cdot (6x + 5) + 2\frac{1}{3} = 8x + 9$$

$$-h\big(g(x)\big) = -\left[-2\left(\frac{4}{3}x + 2\frac{1}{3}\right) + 7\right] = -\left(-\frac{8}{3}x - \frac{14}{3} + 7\right) = \frac{8}{3}x - \frac{7}{3}$$

$$g\Big(h\big(f(x)\big)\Big) = -h\big(g(x)\big) \Leftrightarrow 8x + 9 = \frac{8}{3}x - \frac{7}{3} \Leftrightarrow x = -2\frac{1}{8}$$

14. Odrediti parametar m funkcije $y = \frac{4m+3}{7}x + 2$, tako da grafik ove funkcije bude paralelan sa grafikom funkcije $l = g\big(f(x)\big)$, ako je $f\left(\frac{2}{5}x + 3\right) = \frac{6}{10}x + 3\frac{1}{2}$ i $g(2x - 1) = -4x + 1$.

Rješenje:

Odredimo prvo oblik funkcije $l = g\big(f(x)\big)$.
Da bi smo odredili oblik funkcije l treba da odredimo oblik funkcija $f(x)$ i $g(x)$.

$$f\left(\frac{2}{5}x + 3\right) = \frac{6}{10}x + 3\frac{1}{2} \Leftrightarrow f\left(\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{5}{2}x - \frac{15}{2}\right) + 3\right) = \frac{6}{10} \cdot \left(\frac{5}{2}x - \frac{15}{2}\right) + \frac{7}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x - 3 + 3) = \frac{3}{2}x - \frac{19}{22} + \frac{7}{2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{3}{2}x - 1$$

$$g(2x - 1) = -4x + 1 \Leftrightarrow g\left(2 \cdot \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) - 1\right) = -4 \cdot \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(x + 1 - 1) = -2x - 2 + 1 \Leftrightarrow g(x) = -2x - 1$$

$$l = -2 \cdot \left(\frac{3}{2}x + \frac{139}{50}\right) + 3 \Rightarrow l = -3x - \frac{139}{50} + 3 \Rightarrow l = -3x + \frac{11}{50}$$

Da bi grafici funkcija bili paralelni mora vrijediti $k_1 = k_2$ pa ćemo imati:

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= \frac{4m+3}{7} \\ k_2 &= -3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{4m+3}{7} = -3 \Leftrightarrow m = -6$$

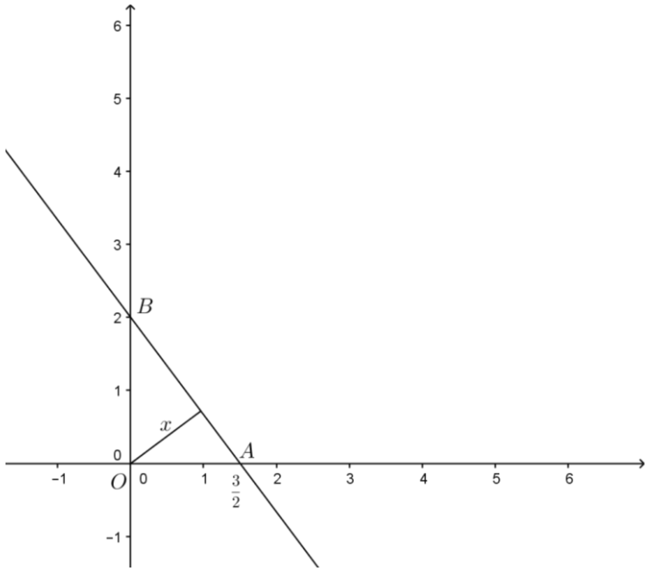
15. Za koje se vrijednosti parametra m prave $x + (4m - 1)y + 2m + 2 = 0$ i $(2m - 1)x + (2m + 1)y + m - 3 = 0$ sijeku na Oy osi?
Rješenje:

Iz obje jednačine izrazimo y za $x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} y = -\dfrac{2m+2}{4m-1} \\ y = -\dfrac{m-3}{2m+1} \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{2m+2}{4m-1} = -\frac{m-3}{2m+1} \Rightarrow m = \frac{1}{19}$$

16. Zadana je prava jednačinom $4x + 3y - 6 = 0$. Kolika je udaljenost koordinantnog početka od te prave?
Rješenje:

Prava siječe koordinantne ose u tačkama $A(0, 2)$ i $B\left(\frac{3}{2}, 0\right)$. Tražena udaljenost x je visina iz vrha O pravouglog trougla ABO.



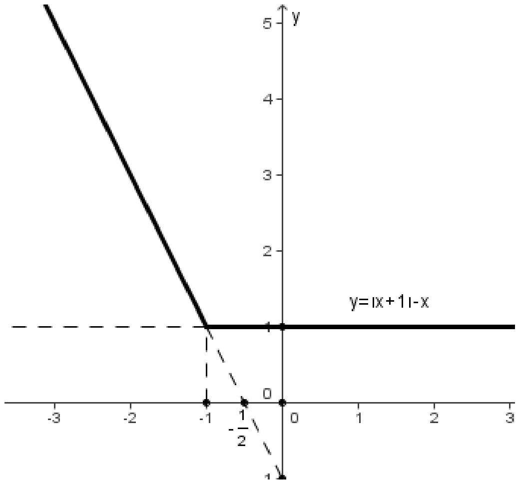
Primjenom Pitagorine teoreme je $AB^2 = OA^2 + OB^2 \Rightarrow AB^2 = 2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow AB = 2.5$
Izjednačavanjem površina dobijamo

$$\frac{1}{2} \cdot \mathrm{OA} \cdot \mathrm{OB} = \frac{1}{2} AB \cdot x \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2.5 \cdot x \Rightarrow x = \frac{6}{5}$$

17. Nacrtati grafik funkcije $y = |x + 1| - x$.
Rješenje:

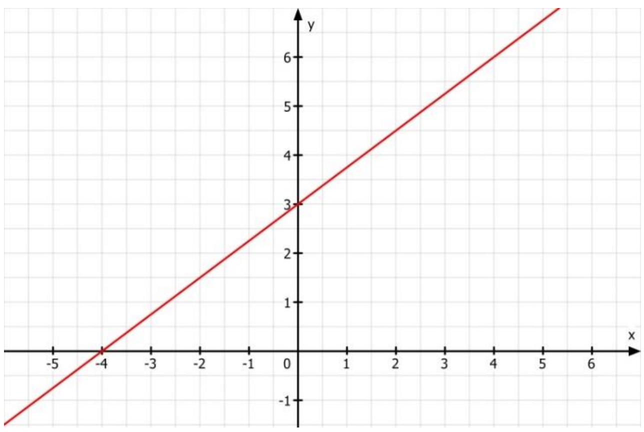
$$y = \begin{cases} x + 1 - x = 1 & \text{, za } x + 1 \geq 0 \text{ , tj. } x \geq -1 \\ -x - 1 - x = -2x - 1, & \text{za } x + 1 < 0 \text{ , tj. } x < -1 \end{cases}$$

Treba nacrtati funkcije $y = 1$, za $x \geq 1$ i $y = -2x - 1$, za $x < -1$



18. Odredi obim i površinu trougla kojeg grafik funkcije $y = \frac{3}{4}x + 3$ gradi sa koordinatnim osama.

Rješenje:



$a = 4, b = 3 \implies c^2 = a^2 + b^2 \implies c = 5$

$O = 12$

$P = \frac{4 \cdot 3}{2} \implies P = 6$

19. Izračunaj površinu kvadrata čije dvije stranice leže na pravcima $x + y - 5 = 0$ i $x + y + 5 = 0$.

Rješenje:

$P = 50cm^2$

20. Odrediti vrijednost parametra p tako da funkcija $y = \frac{p-2}{3-p}\ x + p$ bude rastuća!

Rješenje:

Da bi funkcija bila rastuća mora biti koeficijent pravca veći od nule, u našem slučaju treba biti $\frac{p-2}{3-p} > 0$

Trebamo posmatrati dva slučaja:

I slučaj: $p - 2 > 0$ i $3 - p > 0$

$p > 2$ i $p < 3$

Kada izvršimo presjek rješenja ove dvije nejednačine dobijemo da je rješenje $p \in (2, 3)$

II slučaj : $p - 2 < 0$ i $3 - p < 0$

$p < 2$ i $p > 3$

U ovom slučaju rješenja nejednačina se ne sijeku pa nemaju zajedničkih rješenja što možemo zapisati i na način $p \in \{\emptyset\}$.

Dakle, rješenje je $p \in (2, 3)$.

21. Data je funkcija $y = (4k - 3)x - k$. Nađi vrijednost parametra k tako da grafik funkcije prolazi tačkom $A(3,2)$. Nacrtaj grafik te funkcije i odredi nulu.

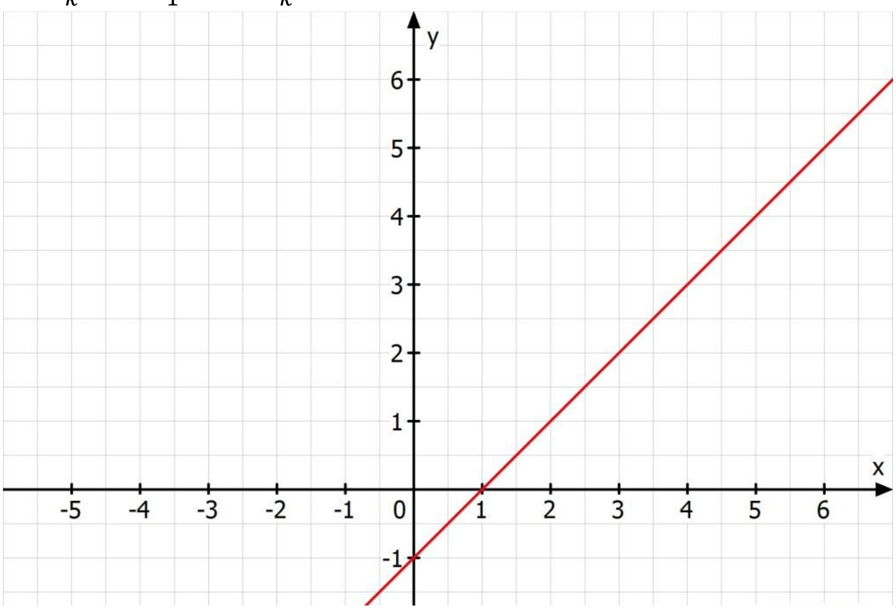
Rješenje:

$y = (4k - 3)x - k$

$2 = (4k - 3) \cdot 3 - k \ \Rightarrow k = 1$

$y = (4 \cdot 1 - 3)x - 1 \ \Rightarrow \ y = x - 1$

Nula funkcije: $-\frac{n}{k} = -\ \frac{-1}{1} \ \Rightarrow -\frac{n}{k} = 1$

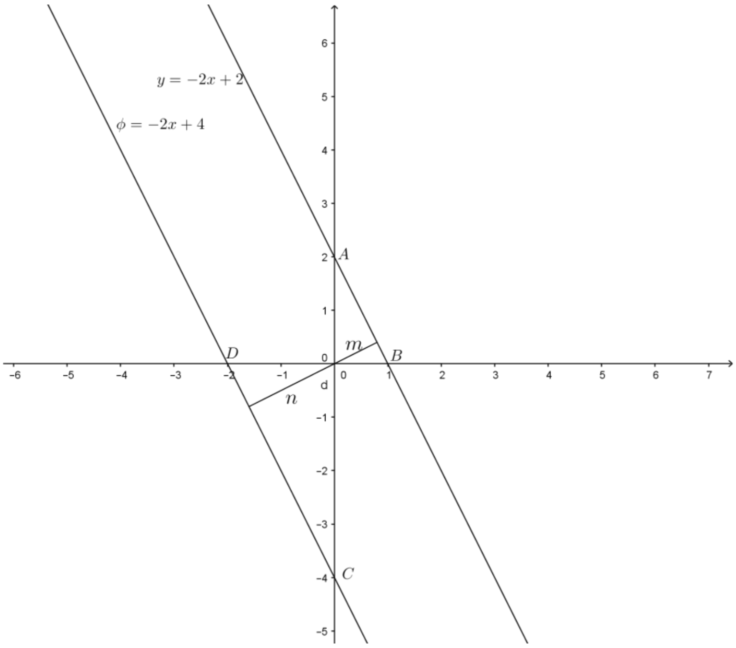


22. Date su funkcije $f(x)=\frac{x}{2}-3$ i $g(x)=\frac{x-1}{4}$. Riješi jednačinu $g[f(x)]=f[f(x)]$.
Rješenje:

$$\left.\begin{aligned} g[f(x)] &= \frac{\left(\frac{x}{2}-3\right)-1}{4}=\frac{\frac{x-6}{2}-1}{4}=\frac{\frac{x-8}{2}}{4}=\frac{x-8}{8} \\ f[f(x)] &= \frac{\frac{x}{2}-3}{2}-3=\frac{\frac{x-6}{2}}{2}-3=\frac{x-6}{4}-3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{x-8}{8}=\frac{x-6}{4}-3 \Rightarrow x=28$$

23. Date su funkcije $f(x)=3x-1$, $g(x)=-\frac{2}{3}x+1\frac{1}{3}$ i $h(x)=-\frac{2}{3}x-1$. Odredi udaljenost između grafika funkcije $y=g\big(f(x)\big)$ i funkcije $\phi=f\big(h(x)\big)$.
Rješenje:

$y=-2x+2;\ \phi=-2x-4$
$d-$ udaljenost između zadatih pravaca



$d=m+n$

$\Delta ABO: AB^2=OB^2+OA^2 \Rightarrow AB=\sqrt{5}$

$\Delta CDO: CD^2=OC^2+OD^2 \Rightarrow CD=2\sqrt{5}$

$$P=\frac{OB\cdot OA}{2}\Rightarrow P=1 \qquad P=\frac{OC\cdot OD}{2}\Rightarrow P=4$$

$$P=\frac{AB\cdot m}{2}\Rightarrow m=\frac{2\sqrt{5}}{5} \qquad P=\frac{CD\cdot n}{2}\Rightarrow n=\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$d=m+n \Rightarrow d=\frac{2\sqrt{5}}{5}+\frac{4\sqrt{5}}{5} \Rightarrow d=\frac{6\sqrt{5}}{5}\approx 2.68$$

Jednadžbe

1. Tri radnika radeći zajedno urade jedan posao za 2 dana. Prvi i drugi radnik zajedno urade isti posao za tri dana, a drugi i treći radnik zajedno za 4 dana. Za koje vrijeme bi svaki od njih sam uradio taj posao?

Rješenje:

Neka je prvi radnik uradio posao za x dana, drugi za y dana a treći za z dana. Za jedan dan sami urade prvi $\frac{1}{x}$ posla, drugi $\frac{1}{y}$ posla, a treći $\frac{1}{z}$. Zajedno urade za jedan dan $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$. Na osnovu teksta zadatka imamo još $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{4}$.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}\end{array}\right\} \Rightarrow z=6$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{4}\end{array}\right\} \Rightarrow x=4$$

Na kraju dobijamo da je i $\frac{1}{y}=\frac{1}{12} \Rightarrow y=12$. Dakle, prvi radnik bi sam uradio posao za 4 dana, drugi za 12 dana a treći radnik za 6 dana.

2. Cifra jedinica trocifrenog broja je 3. Preselimo li je na mjesto stotica (a ostale dvije cifre samo pomaknemo udesno), tada će se stari broj prema novome odnositi kao $3:4$. Koji su to brojevi?

Rješenje:

Označimo li s x dvocifreni dio broja na mjestu stotica i desetica, naš je broj $10x+3$. Pomicanjem cifre 3 na mjesto stotica dolazimo do broja $300+x$. Jednačina glasi $(10x+3):(300+x)=3:4 \Rightarrow x=24$. Dakle, traženi brojevi su 243 i 324.

3. Dvocifreni broj ima cifru desetica 3 puta veću od cifre jedinica. Oduzmemo li od njega broj 18, dobit ćemo broj zamijenjenih cifara. Koji je to broj?

Rješenje:

$a=3b$
$30b+b-18=10b+3b$
$18b=18$
$b=1, a=3$
Traženi broj je 31.

4. Dodamo li proizvodu dva priroda brojeva njihov zbir dobit ćemo 14. Koji su to brojevi?
Rješenje:

Tražene brojeve označimo sa x, y. Iz teksta zadatka zaključujemo da mora vrijediti $xy + x + y = 14 \Rightarrow y = \frac{14-x}{x+1}$. Za x uzmemo bilo koji prirodan broj, a pripadni y izračunamo iz dobivenog izraza. Međutim, jasno je da za x nećemo uzimati redom baš sve moguće prirodne brojeve (jer njih ima beskonačno mnogo), pa proučimo malo taj izraz da vidimo u kojim granicama ćemo izabrati x. Iz brojnika $14 - x$ zaključujemo da x ne može biti veći od 14 jer tada brojnik postaje negativan, nazivnik pozitivan, što znači da bi y bio negativan, a to ne može biti jer y mora biti prirodan broj. Dakle, x mora biti manji od 14. Redom navedi sve brojeve od 1 do 14, izračunaj pripadne y i ispiši samo ona rješenja u kojima su oba broja prirodna. Rješenje su brojevi 2 i 4.

5. Riješi jednadžbu $2\left\{2x - \left[\frac{1}{4}x - \frac{1}{18}\left(16 - \frac{1}{2}(x+4)\right)\right]\right\} - \frac{1}{2}(x-2) = 4x - \frac{2}{3}(x+2)$.

Rješenje:

$$2\left\{2x - \left[\frac{1}{4}x - \frac{1}{18}\left(16 - \frac{1}{2}(x+4)\right)\right]\right\} - \frac{1}{2}(x-2) = 4x - \frac{2}{3}(x+2) \iff x = 10$$

6. Odrediti vrijednost izraza $A = \frac{4a^2-4a+1}{2a-1}$ ako je a rješenje jednadžbe

$$2a - \frac{1}{2}\left[3 - a\left(\frac{1}{4} + 2a\right)\right] + \frac{23}{4} = a^2.$$

Rješenje:

Rješavanjem jednadžbe $2a - \frac{1}{2}\left[3 - a\left(\frac{1}{4} + 2a\right)\right] + \frac{23}{4} = a^2 \Rightarrow a = -2$, pa je vrijednost izraza $A = \frac{4a^2-4a+1}{2a-1} = -5$.

7. Otac je svojim sinovima ostavio u nasljedstvo $160000KM$, sa željom da taj iznos podijele na jednake dijelove. No, jedan od sinova je odustao od svog dijela pa se ostalim sinovima nasljedstvo povećalo za $8000KM$. Koliko je otac imao sinova?
Rješenje:

Neka je n broj sinova i neka je svaki od njih trebao dobiti po xKM. Tada vrijedi jednadžba

$$n \cdot x = 160000$$

Kako je jedan sin odustao, nasljedstvo se dijeli između $(n-1)$ sinova, a svaki od njih dobija $(x + 8000)$ KM. Zato vrijedi jednadžba $(n-1) \cdot (x + 8000) = 160000$. Dalje je
$(n-1) \cdot (x + 8000) = n \cdot x \Rightarrow x = 8000n - 8000$.

$$\left.\begin{array}{l}(n-1) \cdot (x+8000) = 160000 \\ x = 8000n - 8000\end{array}\right\} \Rightarrow \quad n^2 - n - 20 = 0 \iff (n-5)(n+4) = 20$$

Kako negativno rješenje nema smisla $n_1 = 5 \vee n_2 = -4$

8. Jedan nastavnik matematike je doveo na opštinsko takmičenje četiri svoja učenika. Na pitanje koliko ima ukupno učenika kojima predaje matematiku, on je odgovorio:
„*Na školskom takmičenju je učestvovala jedna trećina onih kojima predajem, a na ovo takmičenje sam doveo jednu petnaestinu od mojih učenika koji su učestvovali na školskom takmičenju*“. Odredi broj učenika kojima predaje ovaj nastavnik.
Rješenje:

$$\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{3}x = 4 \implies x = 180$$

9. U jednadžbi $(a-3)x+(a+1)(3-x)=a+x-7$ odrediti a ako se zna da je data jednačina ekvivalentna jednadžbi

$$\frac{x-5}{3}-\frac{x-2}{2}=x-3$$

Rješenje:

Rješavanjem druge jednadžbe dobijamo da je $x=2$ i uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobijamo da je $a=0$.

10. Grupa dječaka i djevojčica sakupila je $170KM$ za rođendanski poklon svom drugu. Djevojčice su davale po $20KM$, a dječaci po $30KM$. Koliko je bilo dječaka, a koliko djevojčica ako je grupa imala neparan broj članova?
Rješenje:

Označimo sa x broj dječaka a sa y broj djevojčiva u ovoj grupi. Tada je prema uslovima zadatka $20x+30y=170$ ili $2x+3y=17$. Brojevi x i y su prirodni pa vrijedi $x\leq 7$ i $y\leq 5$. Kako je $2x$ paran to $3y$ mora biti neparan, odnosno y neparan pa je $y\in\{1,3,5\}$. Grupa je imala neparan broj članova što znači da je imala 4 djevojčice i 3 dječaka.

11. Odredi sve parove cijelih brojeva (x, y) koji zadovoljavaju jednadžbu $xy + 3y = x^2 + 6x + 12$.
Rješenje:

Zadana jednačina može se pojednostavniti i zapisati u obliku

$$y \cdot (x+3) = (x+3)^2 + 3 \Rightarrow y = \frac{(x+3)^2 + 3}{x+3} \Rightarrow y = x + 3 + \frac{3}{x+3}$$

Razlomak $\frac{3}{x+3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x + 3 \in \{-6, -4, -2, 0\}$. Za ovako određene vrijednosti promjenljive x, promjenljiva y će pripadati slijedećem skupu $\{-4, 4\}$, pa su rješenja jednačine uređeni parovi $(-4, -4)$, $(-2, 4)$, $(0, 4)$ i $(-6, -4)$.

12. U jednadžbi $3 \cdot (x - 4k) - 2k = 3 \cdot (2x - 3) + 1$ broj k je realan parametar. Odrediti sve vrijednosti tog parametra za koje je rješenje jednadžbe veće od -2.
Rješenje:

Rješenje date jednadžbe je $x = \frac{8-14k}{3}$. To rješenje je veće od -2 ako je $\frac{8-14k}{3} > -2 \Rightarrow k < 1$. Prema tome, $k \in (-\infty, 1)$.

13. Odredi rješenje jednadžbe $\big|x - |x - |x||\big| = 2008$.
Rješenje:

Za $x \geq 0$, dobijamo $\big|x - |x - |x||\big| = \big|x - |x - x|\big| = |x| = 2008$ pa je $x = 2008$ jedno rješenje.
Za $x < 0$, dobijamo $\big|x - |x - |x||\big| = \big|x - |x + x|\big| = |x + 2x| = -3x$, pa je $x = -\frac{2008}{3}$ još jedno rješenje jednadžbe.

14. Riješi jednadžbu $\big|x + |2x + |4x||\big| = 2009$.
Rješenje:
Za $x \geq 0$ imamo $\big|x + |2x + |4x||\big| = |x + 6x| = 7x = 2009$, odakle je $x = 287$.
Za $x < 0$ imamo $\big|x + |2x + |4x||\big| = |x - 2x| = -x = 2009$, odakle je $x = -2009$.

15. Tri vjeverice ukupno su sakupile 58 lješnjaka. Kada prva pojede polovinu, druga trećinu, a treća četvrtinu svojih lješnjaka ostaje im isti broj lješnjaka. Koliko je svaka od njih sakpuila lješnjaka?

Rješenje:

prva vjeverica: $\frac{x}{2}$ – ostalo lješnjaka

druga vjeverica: $\frac{2x}{3}$ – ostalo lješnjaka

treća vjeverica: $\frac{3x}{4}$ – ostalo lješnjaka

$\frac{x}{2} = \frac{2x}{3} = \frac{3x}{4} \, / \cdot 12$

$6x = 8y = 9z = k \implies x = \frac{k}{6}; y = \frac{k}{8}; z = \frac{k}{9}$

$\frac{k}{6} + \frac{k}{8} + \frac{k}{9} = 58 \, / \cdot 72$

$12k + 9k + 8k = 58 \cdot 72$

$29k = 58 \cdot 72$

$k = \frac{58 \cdot 72}{29} \implies k = 144$

Dakle, prva vjeverica je sakupila 24, druga vjeverica 18, a treća vjeverica je sakupila 16 lješnjaka

16. Riješiti jednadžbu $(3x-5)^2 - (2x+3)^2 - (x-2)(5x+2) = 122$.

Rješenje:

$(3x-5)^2 - (2x+3)^2 - (x-2)(5x+2) = 122$

$9x^2 - 30x + 25 - 4x^2 - 12x - 9 - 5x^2 + 8x + 4 = 122$

$-34x = 102$

$x = -3$

17. Riješiti jednadžbu $\frac{1+3+5+7+\cdots+2009+2011}{2+4+6+8+\cdots+2010+2012} = \frac{x}{2014}$.

Rješenje:

Zbir prvih n parnih brojeva:

$2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + (2n-2) + 2n = 2(1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n-1) + n) =$

$= 2\big((n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots\big) = 2 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \boldsymbol{n(n+1)}$

Zbir prvih n neparnih brojeva:

$3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + (2n-3) + (2n-1) =$

$= (2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + (2 \cdot 3 - 1) + \cdots + (2n-1) =$

$= (2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + 2 \cdot n) - 1 - 1 - 1 - \cdots - 1 =$

$= 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + n) - (1 + 1 + 1 + \cdots + 1) = 2 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} - n = \boldsymbol{n^2}$

Kako imamo 2012 sabiraka to će vrijediti $n = \frac{2012}{2} = 1006$

$$\frac{1+3+5+7+\cdots+2009+2011}{2+4+6+8+\cdots+2010+2012} = \frac{x}{2014} \Rightarrow \frac{n^2}{n(n+1)} = \frac{x}{2014}$$

$$\frac{1006^2}{1006(1006+1)} = \frac{x}{2014} \Leftrightarrow \frac{1006}{1007} = \frac{x}{2014} \Leftrightarrow x = 2012$$

18. U jednom razredu sprovedena je anketa u kojoj je učestvovalo 20040 učenika koji uče ili engleski ili njemački jezik (tačno jedan od njih). Od učenika koji uče engleski jezik, iz nepoznatih razloga, 20% je izjavilo da uči njemački, i slično, 20% učenika koji uče njemački u anketi je izjavilo da uče engleski. Po ovoj anketi 40% učenika u ovom gradu je izjavilo da uči njemački jezik. Koliko učenika u ovom gradu uči engleski?
Rješenje:

Sa x označimo broj učenika koji uče engleski, pa je tada $20040 - x$ broj učenika koji uče njemački

20% učenika koji uče njemački od onih koji uče i engleski označit ćemo sa $\frac{20}{100}x$ pa ćemo imati jednadžbu:

$$\frac{20}{100}x + \underbrace{\frac{80}{100}(20040 - x)}_{\substack{\text{ostatak od ostalih} \\ \text{učenika koji uče} \\ \text{njemački jezik}}} = \frac{40}{100} \cdot 20040$$

Nakon rješavanja gornje jednadžbe dobit ćemo $x = 13360$

19. Od svih učenika jedne škole 174 nisu išli na izlet, a ostali su otputovali u 18 jednakih autobusa, pri čemu je u svaki ušlo 5 učenika više nego što je u autobusu bilo sjedišta. Da je u svaki autobus ušlo onoliko učenika koliko je u njemu sjedišta, bilo bi potrebno još tri autobusa ali bi u jednom od njih ostalo 6 praznih sjedišta.
Koliko u ovoj školi ima učenika?
Rješenje:

x – broj sjedišta u autobusu

$18\,(x+5) = 21x - 6$
$18x + 90 = 21x - 6$
$-3x = -6 - 90 \;/ : (-3)$
$x = 32$
$32 + 5 = 37$
$18 \cdot 37 = 666$ – broj učenika koji je išao na izlet
$666 + 174 = 840$ – ukupan broj učenika.

20. Riješi jednadžbu $10101 \cdot \left(\frac{5}{111111} - \frac{2}{3\cdot7\cdot11\cdot13\cdot37} + \frac{5}{2002\cdot x}\right) = \frac{7}{22}$.

Rješenje:

Rastavimo brojeve 10101, 111111, 2002 i 22 na proste faktore.

$10101 = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37,$

$111111 = 111000 + 111 = 111 \cdot (1000 + 1) = 111 \cdot 1001 = 3 \cdot 37 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 13,$

$2002 = 2 \cdot 1001 = 2 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 13,$

$22 = 2 \cdot 11.$

Sada našu jednadžbu možemo napisati ovako:

$$3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot \left(\frac{5}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37} - \frac{2}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37} + \frac{5}{2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot x}\right) = \frac{7}{2 \cdot 11}$$

$$3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot \left(\frac{3}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37} + \frac{5}{2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot x}\right) = \frac{7}{2 \cdot 11}$$

$$\frac{3}{11} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 37}{2 \cdot 11 \cdot x} = \frac{7}{2 \cdot 11} \Rightarrow 6x + 555 = 7x \Rightarrow -x = -555 \Rightarrow x = 555$$

21. Odrediti par prirodnih brojeva čiji je zbir 30, a zbir njihovog količnika i broja $\frac{198}{223}$ je jednak $\frac{2005}{2007}$.

Rješenje:

Označimo jedan od tih brojeva sa a i neka je $\frac{30-a}{a} + \frac{198}{223} = \frac{2005}{207}$.

$$\frac{30-a}{a} + \frac{198}{223} = \frac{2005}{207} \Rightarrow a = 27$$

Traženi brojevi su 3 i 27.

22. Riješiti i diskutovati rješenje jednadžbe $1 - x - 5a + 5ax = 0$ gdje je $\boldsymbol{a}$ realan parametar.

Rješenje:

$1 - x - 5a + 5ax = 0$

$5ax - x = 5a - 1$

$(5a - 1)x = 5a - 1$

1. slučaj: Za $5a - 1 \neq 0, a \neq \frac{1}{5}$, jednadžba ima jedno rješenje $x = \frac{5a-1}{5a-1} = 1$

2. slučaj: Za $5a - 1 = 0, a = \frac{1}{5}$, imamo $0x = 0$, bezbroj rješenja.

23. Ako pravougaoniku smanjimo jednu stranicu za $4cm$ dobit ćemo kvadrat, čija je površina za $28cm^2$ manja od pravougaonikove. Kolika je površina dobijenog kvadrata?
Rješenje:

$b \cdot 4 = 28$ $\qquad P = b^2$
$b = 28:4$ $\qquad P = 7^2$
$b = 7\ cm$ $\qquad P = 49\ cm^2$

24. Svježa trava sadrži 80% vode, a sijeno svega 20%. Koliko treba svježe trave da bi se dobila 1 tona sijena ?
Rješenje:

Tona sijena sadrži $200kg$ vode i $800kg$ suhe materije. Tih $800kg$ su samo 20% u svježoj travi. Dakle potrebno je $5 \cdot 800 = 4000kg = 4t$ svježe trave.

25. Dva radnika mogu da završe neki posao za 24 dana. Poslije zajedničkog rada od 10 dana, jedan radnik se razbolio, pa je drugi sam nastavio i dovršio taj posao za sledećih 35 dana. Za koliko bi dana završio taj posao svaki od njih ako bi radio sve sam ?
Rješenje:

Radeći sve sam prvi radnik uradio bi za x dana, a drugi za y dana.
$\frac{1}{x}$ prvi radnik za jedan dan uradi
$\frac{1}{y}$ drugi radnik za jedan dan uradi
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{24}$ oba radnika za jedan dan urade
10 dana prvi radnik radio na cijelom poslu
$10 + 35 = 45$ dana drugi radnik radio na cijelom poslu
Na osnovu ovoga imamo:
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{24}$ jednadžbu množimo sa $24xy$
$\frac{10}{x} + \frac{45}{y} = 1$ jednadžbu množimo sa xy
Dobili smo:
$10y + 45x = xy$
$24y + 24x = xy$
Desne strane jednake, te su i lijeve jednake: $10y + 45x = 24y + 24x$, slijedi
$21x = 14y,\ x = \frac{2}{3} \cdot y$
Uvrstimo $x = \frac{2}{3} \cdot y$ u $\frac{10}{x} + \frac{45}{y} = 1$ i dobijemo $y = 60$, a $x = 40$

26. Amra ima $10KM$ manje od Azre, a $30KM$ manje od Adne. Ako bi Azra i Adna poklonile Amri po $100KM$, onda bi Azra imala 3 puta manje novca nego što ima Adna. Koliko novca ima Azra?
Rješenje:

Amra	Azra	Adna
x	$x+10$	$x+30$
$x+200$	$x+10-100$	$x+30-100$

$x-90=\frac{1}{3}(x-70)$
Rješavanjem date jednadžbe dobijamo: $x=100$ odnosno da Azra ima $110KM.$

27. Bomboni se dijele jednako na 20 djece. Kada bi bio jedan bombon više i jedno dijete više, svaki bi dobio bombon manje. Koliko bombona je dijeljeno?
Rješenje:

Neka je x broj bombona koje se dijele. Imamo:
$\frac{x+1}{20+1}=\frac{x}{20}-1$
$20x+20=21x-420$
$x=440$

28. Otac, majka, sin i kćerka imaju zajedno 111 godina, majka i sin imaju 1 godinu više od oca i kćerke, otac je četiri puta stariji od kćerke, a prije godinu dana majka je bila četiri puta starija od kćerke. Odredi starost svakog člana obitelji.
Rješenje:

Neka su a,b,c,d redom godine oca, majke, sina i kćerke. Na osnovu gornjih uvjeta dobivamo sljedeći sistem jednadžbi:

$$a+b+c+d=111$$
$$b+c-1=a+d$$
$$a=4d$$
$$b-1=4(d-1)$$

Lagano se odredi da je $a+d=55$, odnosno $4d+d=55$ ili $d=11$, $a=44$. Direktnim uvrštavanjem u četvrtu jednadžbu dobivamo $b=41$ pa je $c=15$. Otac ima 44 godine, majka 41, sin 15 a kćerka 11 godina.

29. Dokaži da je rješenje jednadžbe $x^2+\sqrt{3}=\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ racionalno.
Rješenje:

$x=\pm 1$

30. Riješiti jednadžbu

$$\frac{\frac{\frac{x-3}{8}+x-3}{9}+x-1}{10}=\frac{\frac{\frac{x+3}{11}+x+3}{12}+x+7}{14}$$

Rješenje*:*

$$\frac{\frac{\frac{x-3}{8}+x-3}{9}+x-1}{10}=\frac{\frac{\frac{x+3}{11}+x+3}{12}+x+7}{14} \Leftrightarrow \frac{9x-11}{80}=\frac{112x+80}{154} \Leftrightarrow x=19$$

31. Nakon poskupljenja od 20% i pojeftinjenja od 10%, cijena neke knjige iznosi $162KM$. Kolika je bila cjena knjige prije poskupljenja?
Rješenje:

Neka je cjena prije poskupljena x. Prema uslovu zadatka imamo:
$$x+\frac{2}{10}x-\frac{1}{10}\left(x+\frac{2}{10}x\right)=162 \Leftrightarrow x=150$$
Cijena knjige prije poskupljenja je bila $150KM$.

32. Koliko učenika ima u odjeljenju ako je bilo 5 odličnih, trećina vrlodobrih, 40% dobrih , 10% dovoljnih, a nedovoljnih nije bilo?
Rješenje:

$$5+\frac{1}{3}x+\frac{40}{100}x+\frac{10}{100}x=x \Leftrightarrow x=30$$

33. Razlika kvadrata dva uzastopna neparna broja je 48. Koji su to brojevi?
Rješenje:

x^2-y^2=48

$x=2a-1$

$y=2a-3$

$(2a-1)^2-(2a-3)^2=48$

$8a=56 \Rightarrow a=7 \wedge x=2\cdot 7-1 \Rightarrow x=13,\ \ y=2\cdot 7-3 \Rightarrow y=11$

34. Ivice kvadra su $4cm$, $6cm$ i $9cm$. Izračunaj površinu kocke čija je zapremina jednaka zapremini vadra.
Rješenje:

$a = 4cm$
$b = 6cm$
$c = 9cm$
$V = a \cdot b \cdot c = 216cm^3$
$V_{kvadra} = V_{kocke} \Rightarrow V_{kocke} = 216cm^3 \Rightarrow a^3 = 216 \Rightarrow a = \sqrt[3]{216} \Rightarrow a = 6$
$P = 6a^2 \Rightarrow P = 216cm^2$

35. Mačka i po za jedan dan i po, ulovi miša i po. Koliko miševa ulovi 9 mačaka za 9 dana?
Rješenje:

$1.5M$	$1.5d$	$1.5m$
$9M$	$9d$	X
$45M$	$1.5d$	$1.5m$
$9M$	$1.5d$	X

M – mačke
m – miševi

$1.5 : 9 = 1.5 : X$
$X = 9$

$9M$	$1.5d$	$9m$
$9M$	$9d$	X

$1.5 : 9 = 9 : X$
$1.5X = 81$
$X =$ 54 miša

36. Koja dva broja imaju jednak proizvod, količnik i razliku?
Rješenje:

$ab = \frac{a}{b} = a - b$
$ab = \frac{a}{b}$
$ab^2 = a \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm 1$
Za $b = 1 \Rightarrow a \cdot 1 = a - 1 \Rightarrow a = a - 1 \Rightarrow 0 = 1$ što nije tačno pa za $b = 1$ ne postoji broj a za koji vrijedi da im je proizvod, količnik i razlika jednak
Za $b = -1 \Rightarrow -a = a + 1 \Rightarrow -2a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$

37. Brojilac razlomka $\frac{23}{42}$ treba uvećati, a imenilac smanjiti za isti broj x tako da se dobije $\frac{7}{6}$. Odredi broj x.
Rješenje:

$x = 12$

38. Koji broj treba oduzeti od brojnika i dodati nazivniku razlomka $\frac{11}{43}$ da bi se dobio racionalan broj $-\frac{1}{2}$? Provjeri.
Rješenje:

$x = 65$

39. Obim pravougaonika iznosi $26cm$, a jedna stranica je za $5cm$ duža od druge. Koliki je obim kvadrata koji ima površinu jednaku datog pravougaonika?
Rješenje:

$O = 26cm$
$2a + 2b = 26cm$
$a = b + 5cm$
$2(b + 5cm) + 2b = 26cm$
$2b + 10cm + 2b = 26cm$
$4b = 16$
$b = 4cm$
$a = b + 5cm$
$a = 9cm$
$O = 4 \cdot a$
$O = 24cm$

$P_p = a \cdot b$
$P_p = 36cm^2$
$P_p = P_k$
$P_k = 36cm^2$
$a^2 = 36$
$a = 6cm$

40. Ako se stranica kvadrata smanji za $4cm$ i njegova površina se smanji za $80cm^2$. Odredi dužinu stranice kvadrata.
Rješenje:

$$\left.\begin{array}{l} a - \text{ stranica kvadrata } \Rightarrow P = a^2 \\ a - 4 - \text{ stranica novog kvadrata } \Rightarrow P = (a-4)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} a^2 - 80 = (a-4)^2 \\ a = 12 \end{array}$$

41. Ako na jednom broju obrišemo cifru jedinica dobiti ćemo broj koji je za 2010 manji od polaznog. Koji je polazni broj?
Rješenje:

Polazni broj je 2233.

42. Razlika kvadrata dva susjedna prirodna broja jednaka je zbiru tih brojeva. Koji su to brojevi ako im je zbir 53?
Rješenje:

$x^2 - (53 - x)^2 = 53 \iff x = 27$
Traženi brojevi su: 27 i $53 - 27 = 26$. Dakle, dva susjedna prirodna broja su 26 i 27.

43.15. aprila 2006. jedna osoba puni toliko godina koliki je zbir cifara godine njenog rođenja. Koje godine je rođena ta osoba ?
Rješenje:

Neka je godina rođenja te osobe $\overline{abcd}$. Po uslovu zadatka je $\overline{abcd} + a + b + c + d = 2006$, tj. $1001a + 101b + 11c + 2d = 2006$. Mora biti $a = 1$ ili $b = 2$. Ako je $a = 1$, onda je $101b + 11c + 2d = 1005$. Odavde je $b = 9$, pa je $11c + 2d = 96$. Provjerom se dobiva $c = 8$, $d = 4$. Dakle jedno rješenje je 1984. Ako je $a = 2$, onda je $101b + 11c + 2d = 4$. Slijedi da je $b = 0$, $c = 0$ i $d = 2$. Drugo rješenje je 2002.

44. Mersiha je krug poluprečnika $2dm$ podijelila na 3 kružna isječka. Svaki isječak je obojila sa drugom bojom. Ustanovila je da je 25% kruga obojila u zeleno, 40% u žuto a ostatak plavom bojom.
a) Koliko dm^2 kruga je plave boje?
b) Koliki je središnji ugao koji pripada žutom dijelu kruga?
c) Izračunaj duzinu kruznog luka zelenog dijela kruga.
Rješenje:

a) $r = 2dm$
$P = \mathrm{r}^2\pi = 12.56dm^2$
Plava = $100\%P - 25\%P - 40\%P$
Plava = $35\%P$
Plava = $\frac{35}{100} \cdot 12.56$
Plava = $4.396dm^2$

b) α=?

$$\begin{array}{ll} 360° & 100\% \\ \alpha & 40\% \end{array}$$

$\alpha: 360° = 40\%: 100\%$

$100\alpha = 14400°$

$\alpha = 144°$

c)

$$\begin{array}{ll} 2r\pi & 100\% \\ l & 25\% \end{array}$$

$l: 2r\pi = 25\%: 100\%$

$100l = 2 \cdot 2dm \cdot 3.14 \cdot 25$

$l = 3.14\ dm$

45. Srednja vrijednost dvanaest brojeva je 4.7. Dodavanjem dva nova broja srednja vrijednost se mijenja i jednaka je 5.6. Koja je srednja vrijednost dva nova broja?

Rješenje:

Iz uvjeta zadatka moguće je zapisati jednakost $x_1 + x_2 + \cdots + x_{12} = 56.4$.
Nakon dodavanja dva nova broja jednakost glasi $x_1 + x_2 + \cdots + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 78.4$.
Oduzimanjem prve jednakosti od druge dobivamo $x_{13} + x_{14} = 22$. Srednja vrijednost dva broja čiji je zbir 22 jest $X(x_{13} + x_{14}) = 11$.

46. Razlomak $\frac{9}{91}$ predstaviti kao razliku dvaju pravih razlomaka čiji su nazivnici 7 i 13!

Rješenje:

Treba odrediti brojeve x i y takvi da su $x < 7$ i $y < 13$, to jest $\frac{x}{7} - \frac{y}{19} = \frac{9}{91}$ ili $\frac{y}{13} - \frac{x}{7} = \frac{9}{91}$

I slučaj

U prvom slučaju biće:

$$\frac{x}{7} - \frac{y}{19} = \frac{9}{91} \Leftrightarrow \frac{13x - 7y}{91} = \frac{9}{91} \Rightarrow 13x - 7y = 9 \Rightarrow x = \frac{7y + 9}{3}$$

Od svih prirodnih brojeva $y < 13$ jedino $y = 8$ daje cijelu vrijednost za x, a to je $x = 5$, pa je $\frac{5}{7} - \frac{8}{13} = \frac{9}{91}$.

II slučaj
U drugom slučaju biće:
$$\frac{7y-13x}{91}=\frac{9}{91} \Longrightarrow 7y-13x=9 \;\Longrightarrow x=\frac{7y-9}{13}$$

Od svih prirodnih brojeva $y<13$ jedino $y=5$ daje cijelu vrijednost za x, a to je $x=2$, pa je $\frac{5}{13}-\frac{2}{7}=\frac{9}{91}$.

47. Hipotenuza pravouglog trougla je $13cm$, a razlika njegovih kateta je $7cm$.
Odredi površinu trougla!
Rješenje:

$c=13\ cm$
$a-b=7\ cm \;\Longrightarrow a=7+b$
$P=?$
Pitagorina teorema:
$c^2=a^2+b^2$
$13^2=(7+b)^2+b^2$
$169=49+14b+b^2+b^2$
$169=49+14b+2b^2 \;\Leftrightarrow b^2+7b-60=0 \;\Leftrightarrow\; (b-5)(b+12)=0 \;\Rightarrow b_1=5 \vee\; b_2=-12$
Obzirom da se radi o dužini stranice trougla negativno rješenje nema smisla, pa je $b=5cm$.
$a=7+5=12\ cm$
Dakle, katete pravouglog trougla su $a=12$ i $b=5$. Površina pravouglog trougla je
$$P=\frac{a\cdot b}{2} \;\Longrightarrow P=30cm^2$$

48. Zbir dva broja je 135. Ako 35% jednog broja iznosi koliko i 28% drugog broja odrediti te brojeve.
Rješenje:

$x-$ traženi broj
$135-x$ $-$drugi traženi broj
$0.35x=0.28(135-x) \;\Leftrightarrow 5x=4(135-x) \Leftrightarrow x=60$
Dakle, traženi brojevi su 60 i 75.

49. Riješiti jednadžbu $x^6-4x^5+4x^4-81x^2+324x-324=0$ u skupu realnih brojeva.
Rješenje:

$x^6-4x^5+4x^4-81x^2+324x-324=0 \;\Leftrightarrow\; x^4(x^2-4x+4)-81(x^2-4x+4)=0$
$\Leftrightarrow\; (x^2-4x+4)(x^4-81)=0 \;\Leftrightarrow (x-2)^2(x^2-9)(x^2+9)=0$
$\Leftrightarrow\; (x-2)^2(x^2+9)(x-3)(x+3)=0 \;\Leftrightarrow x=2 \vee x=3 \vee x=-3$

Sistemi linearnih jednačina

1. Dva broja odnose se kao $19:8$. Kada podijelimo zbir ta dva broja sa njihovom razlikom dobijemo količnik 2 i ostatak 20. Koji su to brojevi?
Rješenje:

Neka su traženi brojevi a i b. Po tekstu zadatka imamo sistem jednačina:

$$\left.\begin{array}{l} a:b = 19:8 \\ a+b = 2(a-b)+20 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 76,\, b = 32$$

Traženi brojevi su 76 i 32.

2. Zbir cifara dvocifrenog broja je 9. Podijelimo li taj broj sa brojem koji ima cifre napisane u obrnutom redoslijedu dobit ćemo količnik 1 ostatak 9. Koji je traženi broj?
Rješenje:

Neka je traženi broj oblika $10a + b$ gdje je a cifra desetica, a b cifra jedinica. Na osnovu teksta zadatka možemo formirati sistem jednačina

$$\left.\begin{array}{l} a+b=9 \\ 10a+b = 10b+a+9 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 5,\, b = 4$$

Traženi broj je 54.

3. Riješiti jednačinu $x^2 - 1 = y^2 + 104$ u skupu prirodnih brojeva.
Rješenje:

Datu jednačinu možemo pisati u obliku $x^2 - y^2 = 105 \;\Rightarrow\; (x-y)(x+y) = 105$. Kako broj možemo rastaviti kao $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ imamo sledeće slučajeve:

$1°\ (x-y)(x+y) = 1 \cdot 105 \;\Rightarrow x = 53 \wedge y = 52$

$2°\ (x-y)(x+y) = 3 \cdot 35 \Rightarrow x = 19 \wedge y = 16$

$3°\ (x-y)(x+y) = 5 \cdot 21 \Rightarrow x = 13 \wedge y = 8$

$4°\ (x-y)(x+y) = 7 \cdot 15 \Rightarrow x = 11 \wedge y = 4$

4. Obim pravougaonika je $2s$, a razlika njegovih stranica $\frac{s}{2}$. Izrazi dužinu stranica i površinu tog pravougaonika pomoću parametra s.
Rješenje:

$$2a + 2b = s$$

$$\left.\begin{array}{l} a+b = s \\ a-b = \frac{s}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow b = \frac{s}{4}, a = \frac{3s}{4}; P = \frac{3s^2}{16}$$

5. Riješi sistem

$$\left.\begin{aligned} x-y&=3\\ x^2-y^2&=\frac{63}{x-y}\end{aligned}\right\}$$

Rješenje:

Druga jednadžba daje $(x-y)(x+y)=\frac{63}{x-y}$, pa imamo sistem jednadžbi

$$\left.\begin{aligned} x-y&=3\\ (x-y)(x+y)&=\frac{63}{x-y}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x-y=3\\ x+y=7\end{aligned}\right\} \Rightarrow x=5 \wedge y=2$$

6. Ako se jedan broj podijeli sa drugim dobiće se količnik 2 i ostatak 11. Ako se njihova suma podijeli njihovom razlikom dobije se količnik 2 i ostatak 20. Koji su to brojevi?

Rješenje:

Neka su traženi brojevi x i y. Prema tekstu zadatka možemo formirati sistem jednačina:

$$\left.\begin{aligned} x&=2y+11\\ x+y&=2(x-y)+20\end{aligned}\right\} \Rightarrow x=73 \wedge y=31$$

Traženi brojevi su 73 i 31.

7. Ako se podijeli jedan dvocifreni broj zbirom svojih cifara dobije se količnik 5 i ostatak 1. Ako se tom broju doda 9 dobije se broj napisan obrnutim redoslijedom. Koji je to broj?

Rješenje:

Neka je traženi dvocifreni broj oblika $10x+y$, gdje je x cifra desetica, a y cifra jedinica. Sada po tekstu zadatka možemo formirati sistem jednadžbi

$$\left.\begin{aligned} 10x+y&=5(x+y)+1\\ 10x+y+9&=10y+x\end{aligned}\right\} \Rightarrow x=5 \wedge y=6$$

Traženi broj je 56.

8. 8 radnika i 7 radnica za 12 dana naprave 53 kompleta nekog namještaja, a 9 radnika i 6 radnica za 18 dana naprave 81 komplet namještaja. Koliko će kompleta namještaja za 20 dana napraviti 12 radnika i 13 radnica?

Rješenje:

Ako za 1 dan jedan radnik napravi x kompleta, a radnica y kompleta namještaja, možemo formirati sistem jednadžbi

$$\left.\begin{aligned} (8x+7y)\cdot 12&=53\\ (9x+6y)\cdot 18&=81\end{aligned}\right\} \Rightarrow x=\frac{1}{3} \wedge y=\frac{1}{4}$$

Za 20 dana 12 radnika i 13 radnica napraviti $20 \cdot \left(12 \cdot \frac{1}{3} + 13 \cdot \frac{1}{4}\right) = 145$ kompleta namještaja.

9. Izračunati parametar k u sistemu jednačina $\left.\begin{array}{l}(k+1)x - y = 1\\ kx + 4y = 10\end{array}\right\}$ tako da zbir rješenja bude 5.

Rješenje:

Najprije izrazimo rješenja po x a onda po y iz jednačina:

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{1+y}{k+1} \\ x = \dfrac{10-4y}{k} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1+y}{k+1} = \frac{10-4y}{k} \Rightarrow y = \frac{9k+10}{5k+4}$$

Sada izrazimo y iz prve i druge jednadžbe i dobijamo rješenje za x:

$$\left.\begin{array}{l} y = kx + x - 1 \\ y = \dfrac{10-kx}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow kx + x - 1 = \frac{10-kx}{4} \Rightarrow x = \frac{14}{5x+4}$$

Znamo da je zbir rješenja 5, pa imamo jednadžbu

$$\frac{14}{5k+4} + \frac{9k+10}{5k+4} = 5 \Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

10. Dva radnika mogu da završe neki posao za 24 dana. Poslije zajedničkog rada od 10 dana, jedan radnik se razbolio pa je drugi nastavio sam i dovršio taj posao za slijedećih 35 dana. Za koliko dana bi taj posao završio svaki od njih ako bi radio sve sam?

Rješenje:

Neka je x broj dana za koji bi prvi radnik završio posao sam, a y broj dana za koji bi drugi radnik uradio posao sam. Za jedan dan prvi radnik bi uradio $\frac{1}{x}$ posla, a drugi $\frac{1}{y}$, a zajedno bi uradili $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{24}$. Na cijelom poslu prvi radnik je radio 10 dana, a drugi 45 dana i uradili su cijeli posao, tj. $\frac{10}{x} + \frac{45}{y} = 1$. Imamo sistem jednadžbi

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{24} \\ \dfrac{10}{x} + \dfrac{45}{y} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 40 \land y = 60$$

11. Dvocifreni broj dva puta je veći od zbira svojih cifara. Ako tom broju cifre zamijene mjesta dobija se broj koji je za 54 veci od trostrukog zbira njegovih cifara. Koji je to broj?
Rješenje:

$$\left.\begin{array}{l} x \cdot 10y = 2(x+y) \\ y \cdot 10 + x = 3(x+y) + 54 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 1 \wedge y = 8$$

To je broj 18.

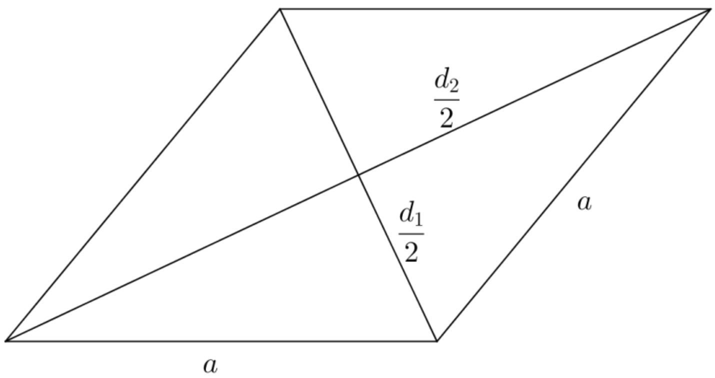
12. Obim paralelograma je $30cm$. Zbir površina kvadrata konstruisanih nad dvjema susjednim stranicama je $113cm^2$. Kolike su dužine tih stranica?
Rješenje:

Označimo sa a dužinu veće, a s b dužinu kraće stranice.
Tada vrijedi $2a + 2b = 30 \implies a + b = 15$ i $a^2 + b^2 = 113$.

$$\left.\begin{array}{l} a + b = 15 \\ a^2 + b^2 = 113 \end{array}\right\} \implies (a = 8cm \wedge b = 7cm) \vee (a = 7cm \wedge b = 8cm)$$

Kako smo označili sa a dužu stranicu paralelograma, drugi slučaj otpada.
Dakle, $a = 8cm$ i $b = 7cm$.

13. Jedna dijagonala romba duža je od druge za $5\ cm$. Ako se duža dijagonala umanji za $2\ cm$, a kraća uveća za $3\ cm$, površina romba će se povećati za $13cm^2$. Odredi dijagonale romba !
Rješenje:



d_1 – kraća dijagonala romba
d_2 – duža dijagonala romba

$d_2 = d_1 + 5$ jedna dijagonala je duža od druge za $5cm$
Ako se duža dijagonala umanji za $2cm$, imamo $d_2 = (d_1 + 5) - 2$
Ako se kraća dijagonala uveća za $3cm$, imamo $d_1 + 3$

Površina romba je $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$, a u našem slučaju imamo da je

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{d_1 \cdot (d_1 + 5)}{2} \\ P + 13 &= \frac{(d_1 + 3) \cdot [(d_1 + 5) - 2]}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow d_1 = 17cm \wedge d_2 = 22cm$$

14. Riješi sistem jednadžbi

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\frac{1}{x-y} - 3} &= -\frac{3}{8} \\ \frac{1}{1 - \frac{1}{x+y}} &= \frac{7}{6} \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 5 \wedge y = 2$$

15. Na granama stoje dva jata ptica. Ako bi dvije ptice iz prvog jata prešle u drugo jato jata bi brojno se izjednačila. Ako bi pak dvije ptice iz drugog jata prešle u prvo jato prvo jato bi postalo tri puta brojnije od drugog jata. Po koliko ptica broje jata?
Rješenje:

$x -$ broj ptica u prvom jatu
$y -$broj ptica u drugom jatu

$$\left.\begin{aligned} x - 2 &= y + 2 \\ x + 2 &= 3(y - 2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 10 \wedge y = 6$$

16. Riješiti sistem jednadžbi

$$\frac{0.8}{\frac{2}{5}}x - \frac{5^5}{25^2}y - \frac{54^2 - 52^2}{53} = 0$$

$$\frac{x - 3y + 1}{2} - \frac{x - 2y}{3} - \frac{4.3 - 7y}{5} = 1 - \frac{4.3 - 7y}{5}$$

Rješenje:

$$\left.\begin{aligned} \frac{0.8}{\frac{2}{5}}x - \frac{5^5}{25^2}y - \frac{54^2 - 52^2}{53} &= 0 \\ \frac{x - 3y + 1}{2} - \frac{x - 2y}{3} - \frac{4.3 - 7y}{5} &= 1 - \frac{4.3 - 7y}{5} \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 1 \wedge y = -\frac{2}{5}$$

17. Ako je $9x^2+4y^2-12xy-16a^2=12$ i $3x-2y+4a=4$, koliko je $3x-2y$?
Rješenje:

$9x^2+4y^2-12xy-16a^2=12$
$(3x-2y)^2-(4a)^2=12$
$(3x-2y-4a)(3x-2y+4a)=12$
A kako je $3x-2y+4a=4$ slijedi

$4(3x-2y-4a)=12$
$3x-2y-4a=3$
Sada imamo sistem jednadžbi
$$\left.\begin{array}{l}3x-2y-4a=3\\3x-2y+4a=4\end{array}\right\}\Longrightarrow 3x-2y=\frac{7}{2}$$

18. Lete dva jata ptica. Jedno jato kaže: „Ako nam date jednu pticu, bit će nas onoliko koliko i vas.“ Drugo jato kaže: „Ako vi nama date jednu pticu, nas će bit dva puta više nego vas.“ Koliko je ptica bilo u jednom, a koliko u drugom jatu?
Rješenje:

$x\ -$ broj ptica prvog jata
$y-$ broj ptica drugog jata
$$\left.\begin{array}{l}x+1=y-1\\y+1=2(x-1)\end{array}\right\}\Longrightarrow x=5\land y=7$$

19. Dužine stranica pravouglog trougla prirodni su brojevi. Odredi obim onog pravouglog trougla koji ima najmanju dužinu hipotenuze, ako je dužina katete 21.
Rješenje:

Neka su a i b dužine kateta i c dužina hipotenuze i neka je $a=21$. Tada vrijedi $c^2-b^2=21^2$ odnosno $(c-b)(c+b)=3\cdot3\cdot7\cdot7$ pri čemu je $c-b<c+b$
Riješimo sada sljedeće sisteme jednadžbi:

$c-b=1$	$c-b=3$	$c-b=7$	$c-b=9$
$\underline{c+b=441}$	$\underline{c+b=147}$	$\underline{c+b=63}$	$\underline{c+b=49}$
$c=221$	$c=75$	$c=35$	$c=29$

Prema tome, najmanja dužina hipotenuze je 29, a obim trougla 70.

20. Poznato je da je 30% nekog broja A za 10 veće od 20% broja B, a 30% broja B je za 35 veće od 20% broja A. Izračunati brojeve A i B.

Rješenje:

$30\%A = 20\%B + 10$

$\underline{30\%B = 20\%A + 35}$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{30}{100}A = \frac{20}{100}B + 10 \\ \frac{30}{100}B - \frac{20}{100}A + 35 \end{array}\right\} \Rightarrow A = 200 \wedge B = 250$$

21. Zbir cifara trocifrenog broja je 17 gdje je cifra desetica 9. Ako cifre stotica i jedinica zamijene mjesta, novi broj je za 100 veći od dvostrukog prvog broja. Koji je prvi broj?

Rješenje:

Taj broj je 296.

22. Na ispitu iz matematike radi se 40 zadataka. Tačan odgovor vrijedi 15 bodova, a netačan minus 4 boda. Amir je riješio sve zadatke, no nažalost neke pogrešno. Koliko je pogrešnih odgovora dao ako je ukupno imao 353 boda?

Rješenje:

Amir je dao 13 pogrešnih odgovora, a 27 tačnih.

23. Riješi sistem jednadžbi

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2007$$
$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2008$$
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=2009$$

Rješenje:

Ako saberemo lijeve i desne strane jednadžbi sistema i podijelimo sa 2 dobit ćemo:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3012$$

Oduzimajući redom jednadžbe sistema od poslednje jednadžbe dobijamo

$$\frac{1}{z}=1005, \frac{1}{x}=1004, \frac{1}{y}=1003$$

tj. rješenja sistema $x = \frac{1}{1004}$, $y = \frac{1}{1003}$, $z = \frac{1}{1005}$.

24. Zbir dužina kateta datog pravouglog trougla je $22cm$. Ako se jedna kateta smanji za $4cm$, a druga poveća za $2cm$ dobija se pravougli trougao čija je površina jednaka površini datog trougla. Odrediti dužine kateta datog trougla.

Rješenje:

$$\left.\begin{array}{l} a+b=22 \Rightarrow a=22-b \\ (a-4)(b+2)=ab \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (18-b)(b+2)=(22-b)\cdot b \\ -6b=-36 \Rightarrow b=6 \wedge a=16 \end{array}$$

25. Zbir cifara dvocirenog broja je 12. Ako cire zamijene mjesta dobije se broj za 15 veći od dvostrukog traženog broja. Koji je to broj?

Rješenje:

$$\begin{array}{l} x+y=12 \\ \underline{yx = 10y+x = 2(10x+y)+15} \\ x+y=12 \\ \underline{10y+x=20x+2y+15} \\ x+y=12 \ / \cdot 19 \\ \underline{-19x+8y=15} \\ 19x+19y=228 \\ \underline{-19x+8y=15} \\ 27y=243 \\ y=9 \\ x=12-y \\ x=3 \end{array}$$

Nejednakosti i nejednadžbe

1. Koliko ima prirodnih brojeva za koje vrijedi nejednakost $2014 < \sqrt{x} < 2015$.
Rješenje:

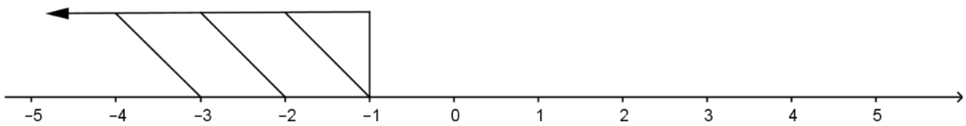
$2014 < \sqrt{x} < 2015 \;\; /^2$
$4056196 \; < \; x \; < \; 4060225$
To su brojevi: $4056197, 4056198, \ldots, 4060224$. Brojeva ukupno ih ima
$4060225 \; - \; 4056197 = \; 4028$.

2. Riješi nejednadžbu u skupu cijelih brojeva $\left|\frac{2x-3}{4}\right| < 1$.
Rješenje:

$-1 < \dfrac{2x-3}{4} < 1$
$-4 \; < \; 2x - 3 \; < \; 4,$
$-\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{7}{2}$
Cijeli brojevi koji odgovaraju rješenju su $x = 0, 1, 2, 3$.

3. Riješi nejednačinu u skupu realnih brojeva $\frac{x-1}{x+1} > 1$.
Rješenje:

$$\frac{x-1}{x+1} > 1 \;\Rightarrow\; -\frac{2}{x+1} > 0 \;\Rightarrow x + 1 < 0 \;\Rightarrow x < -1$$



$x \in (-\infty, -1)$

4. Dokazati da za pozitivne brojeve a, b i c vrijedi nejednakost

$$ab(a+b)+ac(a+c)+bc(b+c) \geq 6abc\ .$$

Rješenje:

$ab(a+b)+ac(a+c)+bc(b+c) = a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2 =$
$= (a^2b+bc^2)+(ab^2+ac^2)+(a^2c+b^2c) =$
$= b(a^2+c^2)+a(b^2+c^2)+c(a^2+b^2) \geq b\cdot 2ac + a\cdot 2ac + c\cdot 2ab = 6abc$

5. Na fudbalskom turniru za pobjedu se dobiva 2 boda, za remi 1 bod, a za poraz 0 bodova. Zna se da je svaka ekipa igrala sa svakom jedanput i da je pobjednička ekipa na kraju osvojila 7 bodova, drugoplasirana 5 bodova, a trećeplasirana ekipa 3 boda. Koliko bodova je imala ekipa koja je bila poslednja na turniru ?

Rješenje:

Neka je ukupan broj ekipa n tada je ukupan broj bodova koje su osvojile ekipe $n(n-1)$. Kako je $n(n-1) \geq 7+5+3 \ \Rightarrow n \geq 5$. Ekipa koje su se plasirale iza trećeg mjesta ima $n-3$, i svaka od njih je osvojila manje od 5 bodova, pa je
$n(n-1) \leq 15+5(n-3) \ \Rightarrow n < 6$.
Iz svega ovog slijedi da je $n=5$. Ukupan broj bodova je 20, pa su četvrto i petoplasirana ekipa osvojile 3, odnosno 2 boda.

6. Koliko ima cijelih brojeva x za koje vrijedi $\frac{1}{4} < \frac{2-x}{7} < \frac{11}{12}$.

Rješenje:

$$\frac{7}{4} < 2-x < \frac{77}{12}$$
$$-\frac{7}{4} > x-2 > -\frac{77}{12}$$
$$\frac{1}{4} > x > -\frac{53}{12}$$
$$-4\frac{5}{12} < x < \frac{1}{4}$$
$$x \in \{-4,-3,-2,-1,0\}$$

7. Za koje vrijednosti promjenljive p izraza $\frac{2p-\frac{3}{4}}{1-\frac{p}{2}}$ ima vrijednost manju od 17?

Rješenje:

$$\frac{2p-\frac{3}{4}}{1-\frac{p}{2}} < 17 \iff \frac{10p-7}{2-p} < 0 \iff \left.\begin{matrix} 10p-7<0 \wedge 2-p>0 \\ 10p-7>0 \wedge 2-p<0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow p \in \left(-\infty, \frac{7}{10}\right) \cup (2, +\infty)$$

8. Riješiti nejednačinu:

$$\sqrt{\frac{x^2+4x+4}{9-6x+x^2}} < 2.$$

Rješenje:

$$\sqrt{\frac{(x+2)^2}{(x-3)^2}} < 2 \iff \left|\frac{x+2}{x-3}\right| < 2 \iff -2 < \frac{x+2}{x-3} < 2 \iff x \in \left(-\infty, \frac{4}{3}\right) \cup (8, +\infty).$$

Prosti i složeni brojevi. Djeljivost

1. Dokaži da je broj $2016^{12} + 2^{10}$ složen.
Rješenje:

$$\begin{aligned} 2016^{12} + 2^{10} &= (2016^6 + 2^5)^2 - 2 \cdot 2^5 \cdot 2016^6 = (2016^6 + 2^5)^2 - 2^6 \cdot 2016^6 = \\ &= (2016^6 + 2^5)^2 - (2^3 \cdot 2016^3)^2 = \\ &= (2016^6 + 2^5 - 2^3 \cdot 2016^3)(2016^6 + 2^5 + 2^3 \cdot 2016^3) \end{aligned}$$

Dakle, kako su oba faktora veća od 1, dati broj je složen.

2. Dokazati da je izraz: $n^5 - 5n^3 + 4n \;\; (n \in N)$ djeljiv sa 120.
Rješenje:

$$n^5 - 5n^3 + 4n = n(n^4 - 5n^2 + 4) = n(n^2 - 1)(n^2 - 4) =$$
$$= n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2) = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$$

Posljednji proizvod predstavlja proizvod pet uzastopnih cijelih brojeva od kojih je uvijek jedan djeljiv sa dva,jedan sa tri, jedan sa četiri i jedan sa pet pa je ovaj proizvod djeljiv sa $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

3. Odredi sve vrijednosti prirodnog broja za koje je razlomak $\frac{3n+29}{n+2}$ cijeli broj.
Rješenje:

$$\frac{3n+29}{n+2} \in Z$$
$$\frac{n+n+n+2+2+2+23}{n+2} = \frac{(n+2)+(n+2)+(n+2)+23}{n+2} = 3 + \frac{23}{n+2}$$
$$3 \in Z \;\Rightarrow \frac{23}{n+2} \in Z \Rightarrow (n+2) \text{ treba da bude djeljivo sa } 23 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \; n+2 \in \{-25, -3, -1, 21\}$$

4. Dokazati da je za ma koji prirodni broj n izraz $\frac{n^2}{2} - \frac{2n}{3} + \frac{n^3}{6}$ cijeli broj.
Rješenje:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{n^2}{2} - \frac{2n}{3} + \frac{n^3}{6} = \frac{3n^2 - 4n + n^3}{6} = \frac{n \cdot (n^2 + 3n - 4)}{6} \\ &\quad n^2 + 3n - 4 = n^2 + 4n - n - 4 = n(n+4) - 1(n+4) = (n+4)(n-1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{n \cdot (n^2 + 3n - 4)}{6} = \frac{n \cdot (n-1)(n+4)}{6} = \frac{n \cdot (n-1)(n+1+3)}{6} =$$
$$= \frac{n \cdot (n-1)(n+1) + 3n(n-1)}{6} = \frac{n \cdot (n-1)(n+1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2}$$

$n \cdot (n-1)(n+1) -$ proizvod tri uzastopna prirodna broja pa je ovaj proizvod djeljiv sa 6, pa vrijedi $\frac{n \cdot (n-1)(n+1)}{6} \in \mathbb{Z}$

$n(n-1) -$ proizvod dva uzastopna prirodna broja pa je ovaj proizvod djeljiv sa 2, pa vrijedi $\frac{n(n-1)}{2} \in \mathbb{Z}$

na osnovu prethodnih relacija zaključujemo da $\frac{n \cdot (n-1)(n+1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} \in \mathbb{Z}$, odnosno $\frac{n^2}{2} - \frac{2n}{3} + \frac{n^3}{6} \in \mathbb{Z}$

5. Naći sve proste brojeve p za koje je $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{p}+\sqrt{p+1}}$ prirodan broj.

Rješenje:

Racionalisat ćemo svaki od razlomaka pa ćemo dobiti:

$\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1; \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}; \ \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} = \sqrt{4} - \sqrt{3}; \ldots; \frac{1}{\sqrt{p}+\sqrt{p+1}} = \sqrt{p+1} - \sqrt{p}$

što nakon uvrštavanja umjesto polaznih ralomaka daje:

$\sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{p+1} - \sqrt{p} = -1 + \sqrt{p+1} = \sqrt{p+1} - 1$

Sada imamo $\sqrt{p+1} - 1 = n, n \in \mathbb{N}$, a odavde nakon prebacivanja jedinice na desnu stranu i kvadriranja dobijamo:

$p + 1 = (n+1)^2 \Rightarrow p + 1 = n^2 + 2n + 1 \Rightarrow p = n^2 + 2n = n \cdot (n+2)$

Vidimo da će p biti prost jedino ako je $n = 1$ pa će biti da je $p = 3$

6. Količnici $\overline{3a5b}: 36$ i $\overline{4c7d}: 45$ su prirodni brojevi. Koji je količnik veći?

Rješenje:

Odredimo ove količnike.

Iz uslova $36 \big| \overline{3a5b} \ \Rightarrow 4 \big| \overline{3a5b} \wedge 9 \big| \overline{3a5b}$.

Iz uslova $4 \big| \overline{3a5b} \ \Rightarrow b = 2 \vee b = 6$.

Iz uslova $9 \big| \overline{3a5b} \ \Rightarrow 9 | (3 + a + 5 + b) \ \Rightarrow 9 | (8 + a + b) \ \Rightarrow a + b = 1 \vee a + b = 10$.

Za $b = 2 \ \Rightarrow a = 8$, odnosno $\overline{3a5b} = 3852$, pa je $3852: 36 = 107$.

Za $b = 6 \ \Rightarrow a = 4$, odnosno $\overline{3a5b} = 3456$, pa je $3456: 36 = 96$.

Iz uslova $45 \big| \overline{4c7d} \ \Rightarrow 5 \big| \overline{4c7d} \wedge 9 \big| \overline{4c7d}$.

Iz uslova $5 \big| \overline{4c7d} \ \Rightarrow d = 0 \vee d = 5$.

Iz uslova $9 \big| \overline{4c7d} \ \Rightarrow 9 | (4 + c + 7 + d) \ \Rightarrow 9 | (11 + c + d) \ \Rightarrow c + d = 7 \vee c + d = 16$.

Za $d = 0 \ \Rightarrow c = 7$, odnosno $\overline{4c7d} = 4770$, pa je $4770: 45 = 106$.

Za $d = 5 \ \Rightarrow c = 2$, odnosno $\overline{4c7d} = 4275$, pa je $4275: 45 = 95$.

Dakle, ako je $(a, b, c, d) \in \{(8, 2, 7, 0), (8, 2, 5, 2), (4, 6, 5, 2)\} \ \Rightarrow \ \overline{3a5b}: 36 > \overline{4c7d}: 45$.

Ako je $(a, b, c, d) \in \{(4, 6, 7, 0)\} \ \Rightarrow \ \overline{3a5b}: 36 > \overline{4c7d}: 45$.

7. Koje dvije cifre nedostaju u zapisu broja

$$\overline{1376x75309122634504631597958158090 24y0000000}$$

koji je jednak umnošku prvih 37 prirodnih brojeva? Odgovor obrazloži.

Rješenje:

U proizvodu prvih 37 prirodnih brojeva figurira 8 faktora 5 ($5, 10, 15, 20$ i 30 po jedan, a u broju 25 dva) i još više faktora 2, pa proizvod završava sa 8 nula, što znači $y = 0$. Pošto ovaj proizvod sadrži i faktor 9, to zbir svih njegovih cifara mora biti djeljiv sa 9, tj.
$9|(150 + x) \Rightarrow x = 3$.

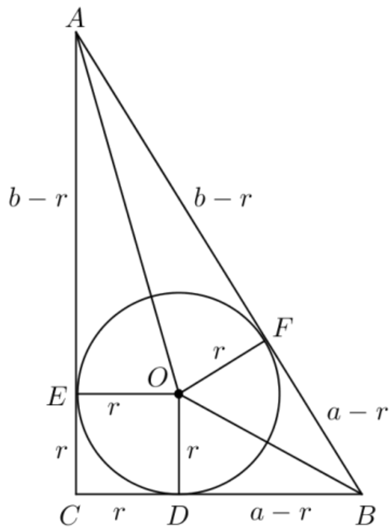
8. Odredi sve proste brojeve p, q i r takve da je $p \cdot (264q + 4r) = 2008$.

Rješenje:

Napišimo broj 2008 u obliku proizvoda prostih faktora: $2008 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 251$. Pošto je $264q + r > 8, \forall q, r \in \mathbb{N} \Rightarrow p = 2$, odnosno $264q + 4r = 1004$.
$1004: 264 < 4 \Rightarrow q < 4$, pa q može biti 2 ili 3.
Ako je $q = 2$ imamo $r = (1004 - 264 \cdot q): 4 = (1004 - 264 \cdot 2): 4 = 486: 4$. Međutim, rezultat dijeljenja $486: 4$ nije prirodan broj.
Ako je q = 3, imamo $r = (1004 - 264 \cdot q): 4 = (1004 - 264 \cdot 3): 4 = 212: 4 = 53$.
53 je prost broj, kao i brojevi 2 i 3, pa je rješenje zadatka $(p, q, r) = (2, 3, 53)$.

Trougao i četverougao. Mnogougao

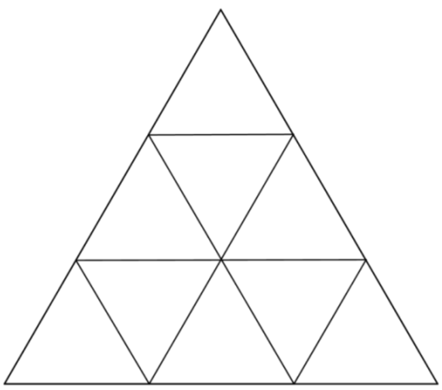
1. Dokazati da je zbir poluprečnika upisane i opisane kružnice pravouglog trougla jednak aritmetičkoj sredini kateta.
Rješenje:



Neka je O centar upisane kružnice i neka je r njen poluprečnik. Znamo da je poluprečnik opisane ktužnice $R = \frac{c}{2}$. Četverougao $ODCE$ je kvadrat pa je $BD = a - r$ i $AE = b - r$. Iz podudarnosti trouglova ODB i OFB slijedi da je $BF = a - r$, a iz podudarnosti trouglova OEA i OFA slijedi da je $FA = b - r$. Sada imamo

$$c = (a - r) + (b - r) \wedge c = 2R \Longrightarrow r + R = \frac{a + b}{2}$$

2. U jednakostranični trougao stranice 3cm razmješteno je 12 tačaka. Dokazati da se u svakom slučaju mogu naći dvije tačke čija je udaljenost manja ili jednaka od $1cm$.
Rješenje:

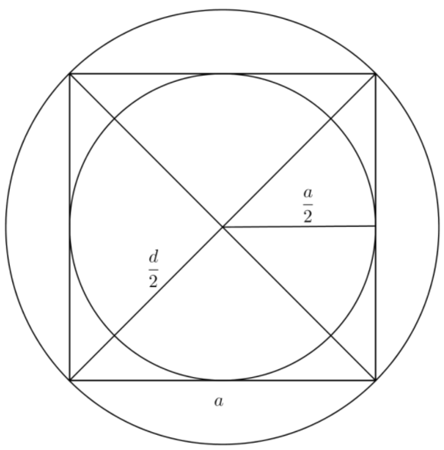


Podijelimo dati jednakostranični trougao na 9 podudarnih jednakostraničnih trouglova, podjelom stranica datog trougla na po tri jednaka dijela, a zatim povlačenjem paralela sa stranicama. Kako je 9 trouglova, a 12 tačaka, u bar jednom trouglu stranice $1cm$ naći će se bar dvije tačke čija će udaljenost biti manja ili jednaka $1cm$.

3. Obim paralelograma je $30cm$. Zbir površina kvadrata konstruisanih nad dvjema susjednim stranicama je $113cm^2$. Kolike su dužine tih stranica?
Rješenje:

$2a + 2b = 30, \quad a + b = 15$
$a^2 + b^2 = 113$
$(a + b)^2 = 225$
$a^2 + 2ab + b^2 = 225$
$2ab = 112$
$ab = 56$ pa zaključujemo $a = 8cm, b = 7cm$.

4. Izračunaj povrsinu kružnog prstena kojeg cine opisana kružnica i upisana kružnica u kvadrat stranie $a = 6cm$.
Rješenje:



$P = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi \implies P = \left[\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]\pi$
$P = 9\pi cm^2$

5. Uglovi deltoida koji obrazuju dijagonale sa nejednakim stranicama su $50°$ i $70°$. Koliki su uglovi deltoida?
Rješenje:

$\alpha + 50° + 50° = 180°$
$\alpha = 180° - 100°$
$\alpha = 80°$
$\delta + 70 + 70 = 180°$
$\delta = 180° - 14O°$
$\delta = 40°$
$\alpha = 80 \quad \delta = 40 \quad \gamma = 120$

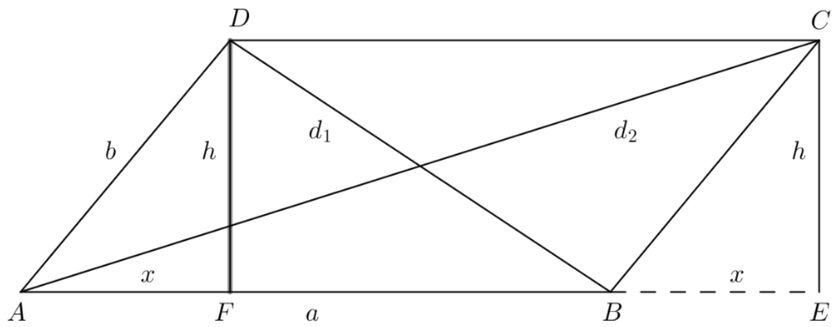
6. Naći sve pravougaonike čije su dimenzije (dužina i širina) prirodni brojevi, a kojima su obimi brojno jednaki njihovim površinama.
Rješenje:

$a, b \in \mathbb{N}$, $ab = 2a + 2b \implies ab - 2b = 2a \implies b = \frac{2a}{a-2}$

$b = \dfrac{2a - 4 + 4}{a - 2} = \dfrac{2(a-2)}{a-2} + \dfrac{4}{a-2} = 2 + \dfrac{4}{a-2}$

Da bi dimenzija b pravougaonika bila prirodni broj treba da vrijedi $4 : (a-2) \in \mathbb{N}$, pa zaključujemo da $a \in \{3, 4\}$.
Za $a = 3 \implies b = 6$.
Za $a = 4 \implies b = 4$, tj. u ovom slučaju imamo kvadrat sa osobinom da mu je mjerni broj obima i površine jednak.
Dakle, postoji samo pravougaonik sa dimenzijama 6 i 3 te kvadrat sa dimenzijama 4.

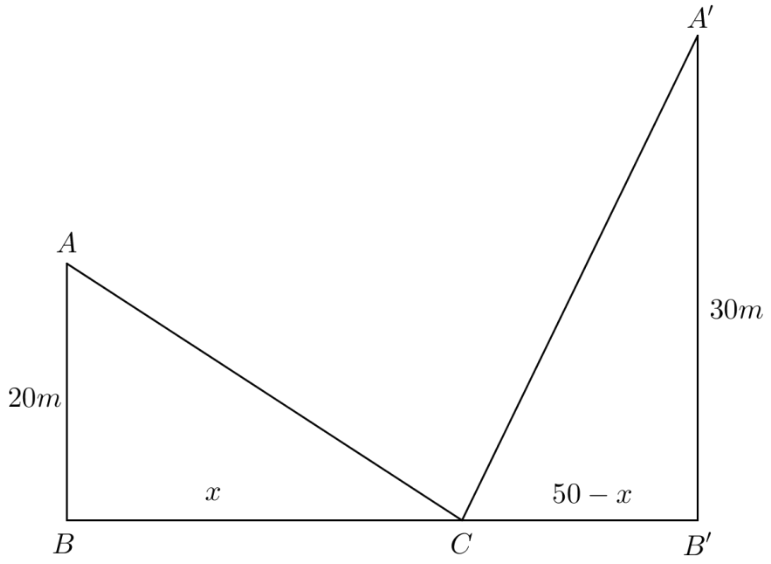
7. Neka su a i b stranice, a d_1 i d_2 dijagonale paralelograma. Dokazati da je: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.
Rješenje:



Neka su visine $CE = DF = h$, a odsječci $AF = BE = x$. Trouglovi ΔAFD i ΔBEC su pravougli i vrijedi: $b^2 = x^2 + h^2$. Posmatrajmo sada trougao ΔAEC i on je pravougli pa vrijedi $d_1^2 = (a + x)^2 + h^2$ tj. $d_1^2 = a^2 + 2ax + x^2 + h^2$. Posmatrajmo trougao ΔFBD i on je pravougli pa vrijedi $d_2^2 = (a - x)^2 + h^2$ tj. $d_2^2 = a^2 - 2ax + x^2 + h^2$.
Zamjenom prethodne dvije jednakosti u poslednju jednakost dobijamo:
$d_1^2 = a^2 + 2ax + b^2$
$d_2^2 = a^2 - 2ax + b^2$
Sabiranjem ove dvije jednakosti dobijemo $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$

8. Na suprotnim obalama rijeke rastu dva drveta. Visina jednog drveta je $20m$, a drugog $30m$ i udaljenost između njih je $50m$. Na vrhu svakog drveta sjedi po jedna ptica. Odjednom na površini rijeke pojavi se riba. Obje ptice polete prema ribi u isto vrijeme, istom brzinom i istovremeno dolete do ribe. Na toj udaljenosti od nižeg drveta se pojavila riba?

Rješenje:

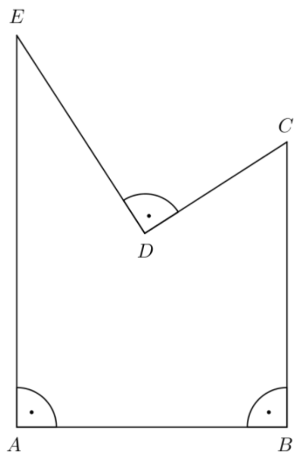


$AC = A'C'$ pa je

$20^2 + x^2 = (50 - x)^2 + 30^2 \iff x = 30$

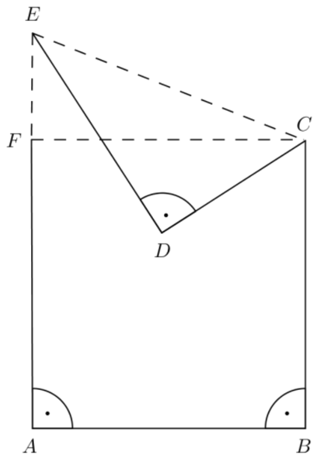
Na udaljenosti od $30m$ se pojavila riba od podnožja nižeg drveta.

9. Naći obim mnogougla sa slike ako je $AE = 13cm$, $BC = 7cm$, $ED = 8cm$ i $CD = 6cm$ i ako je $\sphericalangle EAB = \sphericalangle ABC = \sphericalangle CDE = 90°$.



Rješenje:

Kako je $EC = 10cm$ i ako na AE odaberemo tačku F tako da je $AF = BC = 10cm$, tada je $ABCF$ pravougaonik, a CEF pravougli trougao.



Dalje imamo $AB = CF = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8cm.$
Dakle, $O_{ABCDE} = 8 + 7 + 6 + 8 + 13 = 42cm.$

10. Ako sa d_n označimo broj dijagonala iz jednog tjemena koveksnog mnogougla, a sa D_n ukupan broj dijagonala tog mnogougla, odredi mnogougao za koji vrijedi $9d_n^2 - d_n^2 = 0$.
Rješenje:

$$\left.\begin{array}{l} d_n = n - 3 \\ D_n = \dfrac{n(n-3)}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow 9(n-3)^2 - \left(\frac{n(n-3)}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow (n-3)^2 \cdot \left(9 - \frac{n^2}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (n-3)^2 = 0 \vee \left(9 - \frac{n^2}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow n_1 = \vee\ n_2 = 6$$

Dakle, jednakost $9d_n^2 - d_n^2 = 0$ vrijedi za trougao i šestougao.

11. Ako je broj dijagonala mnogougla 5 puta veći od broja njegovih stranica, koliko stranica ima taj mnogougao?
Rješenje:

$$\left.\begin{array}{l} n - \text{broj stranica mnogougla} \\ \dfrac{n(n-3)}{2} - \text{broj dijagonala mnogougla} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{n(n-3)}{2} = 5n \Leftrightarrow n = 13$$

Racionalni izrazi

1. Izračunati: $2^{20}-\sqrt{(1+2^{11}+2^{20})(1-2^{11}+2^{20})}$
Rješenje:

Uočimo da je:
$1+2^{11}+2^{20}=1+2\cdot 2^{10}+2^{20}=(1+2^{10})^2$
$1-2^{11}+2^{20}=1-2\cdot 2^{10}+2^{20}=(1-2^{10})^2$
Sada je:
$2^{20}-\sqrt{(1+2^{11}+2^{20})(1-2^{11}+2^{20})}=$
$=2^{20}-|1+2^{10}|\cdot|1-2^{10}|=$
$=2^{20}-(1+2^{10})(2^{10}-1)=2^{20}-(2^{20}-1)=1$

2. Tarik je napisao sve trocifrene brojeve i za svaki od njih odredio proizvod njegovih cifara. Nakon toga odredio je i zbir svih tih proizvoda. Koji je broj dobio?
Rješenje:

Proizvod cifara trocifrenog broja kojem je cifra desetica ili cifra jedinica jednaka nuli iznosi 0. Takvi brojevi neće uticati na ukupan zbir svih proizvoda.
Promatrajući brojeve prve stotice lako se vidi:
- zbir proizvoda cifara brojeva $111, 112, 113, \ldots, 118, 119$ je $1+2+3+\cdots+8+9=45$
- zbir proizvoda cifara brojeva $121, 122, 123, \ldots, 128, 129$ je $2\cdot(1+2+3+\cdots+8+9)=2\cdot 45$
- analogno, slijede zbirovi proizvoda $3\cdot 45$, $4\cdot 45, \ldots, 8\cdot 45$ i $9\cdot 45$.

Ukupan zbir proizvoda prve stotice iznosi
$45+2\cdot 45+45\cdot 3+\cdots+8\cdot 45+9\cdot 45=45\cdot(1+2+3+\cdots+8+9)=45\cdot 45=45^2$
Za brojeve druge stotice taj je zbroj umnožaka dvostruko veći (zbog znamenke stotice 2) i iznosi: $2\cdot 45^2$
Analogno, za ostale su trocifrene brojeve zbirovi proizvoda cifara jednaki su:
$3\cdot 45^2$, $4\cdot 45^2$, ..., $9\cdot 45^2$
Konačni zbir svih proizvoda iznosi
$45^2\cdot(1+2+3+\cdots+8+9)=45^2\cdot 45=45^3$.

3. Izračunaj vrijednost izraza $\frac{a^2}{ab+b^2}$ ako omjer brojeva a i b iznosi $2:5$.
Rješenje:

$$a:b=2:5 \Rightarrow a=\frac{2b}{5}$$

$$\frac{a^2}{ab+b^2}=\frac{(\frac{2b}{5})^2}{\frac{2b}{5}\cdot b+b^2}=\frac{\frac{4b^2}{25}}{\frac{7b^2}{5}}=\frac{4}{35}$$

4. Ako je $x=\sqrt{12+2\sqrt{35}}-\sqrt{12-2\sqrt{35}}$ odrediti koliko je $\left(x-2\sqrt{5}-1\right)^{2016}$?
Rješenje:

Prvo ćemo transformisati vrijednost x, pa ćemo dobiti:

$$\boldsymbol{x}=\sqrt{12+2\sqrt{35}}-\sqrt{12-2\sqrt{35}}=\sqrt{12+2\sqrt{7\cdot 5}}-\sqrt{12-2\sqrt{7\cdot 5}}=$$
$$=\sqrt{12+2\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}}-\sqrt{12-2\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}}=$$
$$=\sqrt{7+5+2\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}}-\sqrt{7+5-2\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}}=$$
$$=\sqrt{7+2\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}+5}-\sqrt{7-2\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}+5}=$$
$$=\sqrt{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{7}+\sqrt{5}-\sqrt{7}+\sqrt{5}=\mathbf{2\sqrt{5}}$$
$$\left(x-2\sqrt{5}-1\right)^{2016}=\left(2\sqrt{5}-2\sqrt{5}-1\right)^{2016}=(-1)^{2016}=1$$

5. Izračunati vrijednost izraza $\sqrt{19-4\sqrt{11-4\sqrt{7}}}-\sqrt{7}$.
Rješenje:

$$\sqrt{19-4\sqrt{11-4\sqrt{7}}}-\sqrt{7}=\sqrt{19-4\sqrt{4+7-4\sqrt{7}}}-\sqrt{7}=$$
$$=\sqrt{19-4\sqrt{2^2-2\cdot 2\sqrt{7}+\left(\sqrt{7}\right)^2}}-\sqrt{7}=\sqrt{19-4\sqrt{\left(2-\sqrt{7}\right)^2}}-\sqrt{7}=$$
$$=\sqrt{19-4\left(2-\sqrt{7}\right)}-\sqrt{7}=\sqrt{19-8+4\sqrt{7}}-\sqrt{7}=\sqrt{11+4\sqrt{7}}-\sqrt{7}=$$
$$=\sqrt{4+7+4\sqrt{7}}-\sqrt{7}=\sqrt{4+4\sqrt{7}+7}-\sqrt{7}=\sqrt{2^2+2\cdot 2\cdot\sqrt{7}+\left(\sqrt{7}\right)^2}-\sqrt{7}=$$
$$=\sqrt{\left(2+\sqrt{7}\right)^2}-\sqrt{7}=2+\sqrt{7}-\sqrt{7}=2$$

6. Ako je $a(b+c)=bc\left(\frac{a}{2004}-1\right)$ gdje su $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ izračunati $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.
Rješenje:

- $a(b+c)=bc\left(\frac{a}{2004}-1\right)$

$$\left.\begin{array}{l} ab+ac=\frac{abc}{2004}-bc\ \Rightarrow\ \boldsymbol{ab+ac+bc}=\frac{abc}{2004} \\ \text{- s druge strane imamo: } \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{\boldsymbol{bc+ac+ab}}{abc} \end{array}\right\}\ \Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{\frac{abc}{2004}}{abc}=\frac{1}{2004}$$

7. Ako je $x + y = 6$ i $x \cdot y = 8$ pokazati da je $x^4 + y^4 = 272$
Rješenje:

$(x+y)^2 = 36$

$x^2 + 2xy + y^2 = 3$
Iz uslova zadatka $x \cdot y = 8$ ovdje je $2xy = 16$.

$x^2 + y^2 = 36 - 16$
$x^2 + y^2 = 20 \ / \cdot 2$
$(x^2 + y^2)^2 = 20^2$
$x^4 + 2x^2y^2 + y^2 = 400$
$x^4 + y^4 = 400 - 2 \cdot 64$
$x^4 + y^4 = 400 - 128$
$x^4 + y^4 = 272$

8. Reduciraj izraz

$$\frac{\frac{x-y}{4z} - \frac{4z}{x-y}}{\frac{1}{4z} - \frac{1}{x-y}}$$

Rješenje:

$$\frac{\frac{x-y}{4z} - \frac{4z}{x-y}}{\frac{1}{4z} - \frac{1}{x-y}} = x - y + 4z$$

9. Naći sve trocifrene brojeve koji su jednaki trećem stepenu zbira svojih cifara.
Rješenje:

Neka je broj $\overline{abc}$ rješenje zadatka, tj. $\overline{abc} = (a+b+c)^3$. Imamo: $4^3 < 100$ i $999 < 10^3$, pa vrijedi $4 < (a+b+c) < 10$.
Za $a+b+c=5 \Rightarrow (a+b+c)^3 = 5^3 = 125, 1+2+5 \neq 5$.
Za $a+b+c=6 \Rightarrow (a+b+c)^3 = 6^3 = 216, 2+1+6 \neq 6$.
Za $a+b+c=7 \Rightarrow (a+b+c)^3 = 7^3 = 343, 3+4+3 \neq 7$.
Za $a+b+c=8 \Rightarrow (a+b+c)^3 = 8^3 = 512, 5+1+2 = 8$.
Za $a+b+c=9 \Rightarrow (a+b+c)^3 = 9^3 = 729, 7+2+9 \neq 9$.
Jedini takav broj je broj 512.

10. Pokazati da izraz $\frac{(3n+1)^2-(1-n)^2}{2}+1$ predstavlja neparan broj za svako $n \in \mathbb{N}$.
Rješenje:

$$\frac{(3n+1)^2-(1-n)^2}{2}+1=\frac{9n^2+6n+1-(1-2n+n^2)}{2}+1=\frac{8n^2+8n}{2}+1=$$

$=4n^2+4n+1=(2n+1)^2$
A ovo je kvadrat neparnog broja.

11. Dokazati nejednakost: $a^2+b^2+c^2 \geq 1;\ \ (a,b,c \in R\ ,\ \ ab+ac+bc=1)$.
Rješenje:

$a^2+b^2+c^2 \geq 1 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc\ \ /\cdot 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2 \geq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2 \geq 0$.
Kako kvadrat svakog realnog broja ne može biti negativan, to je dobijena nejednakost istinita za sve $a,b,c \in R$. Vrijedi jednakost ako i samo ako je $a=b=c$.

12. Za koje vrijednosti promjenljvih x i y izraz: $\mathrm{A}=2\mathrm{x}^2+2\mathrm{xy}+\mathrm{y}^2-2\mathrm{x}+2\mathrm{y}+2$, $(\mathrm{x},\mathrm{y}\ \in\ \mathrm{R})$ ima najmanju (minimalnu) vrijednost?
Rješenje:

Dati izraz možemo rastaviti na sledeći način:
$A=2x^2\ +\ 2yx+y^2-2x+2y+2=$
$\quad=(x^2+2xy+y^2-2x+2y+1)+(x^2-4x+4)-3=$
$\quad=(x+y+1)^2+(x-2)^2-3$.
Zbog $(x+y+1)^2\ \geq 0$ i $(x-2)^2 \geq 0, (x,y\ \in\ R)$ možemo zaključiti da je najmanja vrijednost izraza A za $x+y+1=0$ i $x-2=0$, tj. kada sredimo dobijemo $x=2$ i $y=-3$. Dakle, najmanja vrijednost datog izraza je: $A=-3$; za $x=2$ i $y=-3$.

13. Dokazati da je broj $2007^{2005}-2007$ djeljiv sa 90.
Rješenje:

$2007^{2005}-2007=2007\cdot(2007^{2004}-1)=9\cdot 223\cdot(2007^{2004}-1)$
Poslednja jednakost je sigurno djeljiva sa 9. Da bi izraz bio djeljiv sa 90 on mora biti djeljiv i sa 9 i sa 10. Broj 2007^4 se završava sa cifrom 1, pa se i broj 2007^{2004} završava sa cifrom 1, pa će biti da se izraz $2007^{2004}-1$ završava sa cifrom 0 pa će izraz $2007^{2004}-1$ biti djeljiv sa 10. Budući da je $2007^{2005}-2007$ djeljiv i sa 9 i sa 10 to je on djeljiv i sa 90.

Analitička geometrija. Mnogougao

1. Zadane su tačke $A(1,1)$, $B(4,3)$ i $C(-1,5)$. Napiši jednačinu pravaca na kojima leže stranice trougla ABC.
Rješenje:

Stranica AB leži na pravoj koja prolazi kroz tačke A i B, stranica BC leži na pravoj koja prolazi kroz tačke B i C i stranica AC leži na pravoj koja prolazi kroz tačke A i C. Na osnovu navedenog i opšteg oblika linearne funkcije $y = kx + n$, dobijemo sisteme:

$$\begin{array}{lll} 1 = k + n & 3 = 4k + n & 1 = k + n \\ 3 = 4k + n & 5 = -k + n & 5 = -k + n \end{array}$$

Rješavanjem sistema dobijemo jednačine traženih pravaca: $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}, y = -2x + 3$ i $y = -\frac{2}{5}x + \frac{23}{5}$.

2. U pravouglom koordinatnom sistemu zadan je pravougaonik sa svojim vrhovima A(0,0), $B(6,0)$, $C(6,4)$ i $D(0,4)$. Napiši jednačine pravaca na kojima leže dijagonale pravougaonika.
Rješenje:

Dijagonala AC leži na pravoj koja prolazi kroz tačke A i C, dok dijagonala BD leži na pravoj koja prolazi tačkama B i D. Na osnovu navedenog i opšteg oblika linearne funkcije $y = kx + n$, dobijemo sisteme:

$$\begin{array}{ll} 0 = n & 0 = 6k + n \\ 4 = 6k + n & 4 = n \end{array}$$

Rješavanjem sistema dobijemo jednačine traženih pravaca $y = \frac{2}{3}x$ i $y = -\frac{2}{3}x + 4$.

3. Zadane su tačke $A(2,2)$, $B(5,0)$, $C(7,3)$ i $D(4,5)$. Da li je četverougao $ABCD$ paralelogram? A pravougaonik?
Rješenje:

Pronađimo jednadžbe pravaca na kojima leže stranice četverougla. To su :

$$\left.\begin{array}{l} AB: y = -\frac{2}{3}x + \frac{10}{3} \\ BC: y = \frac{3}{2}x - \frac{15}{2} \\ CD: y = -\frac{2}{3}x + \frac{23}{9} \\ AD: y = \frac{3}{2}x - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Iz koeficijenata smjera zaključujemo da su naspramne stranice paralelne što znači da je ovaj četverougao paralelogram. Također iz koeficijenata pravca zaključujemo da su susjedne stranice normalne, što znači da je četverougao $ABCD$ pravougaonik.

4. Površina trougla je 8, a dva njegova vrha su u tačkama $A(1,-2)$, $B(2,3)$. Odrediti koordinate trećeg vrha C ako on leži na pravcu $2x+y-2=0$.
Rješenje:

Neka su x i y koordinate vrha C. Koordinate tada zadovoljavaju jednadžbu $y=-2x+2$.
Iz uvjeta za površinu trougla dobijamo:

$P=\frac{1}{2}|1\cdot(3-y)+2\cdot(y+2)+x\cdot(-2-3)| \implies 2P=|7+y-5x|$

Uvrštavajući $y=-2x+2$ i $P=8$ imamo $16=|9-7x|$.
Razlikujemo dvije mogućnosti:

$$9-7x=16 \Rightarrow x_1=-1,$$
$$9-7x=-16 \Rightarrow x_2=\frac{25}{7}.$$

Uzimajući u obzir $y=-2x+2$ dobijamo odgovarajuće ordinate $y_1=4$, $y_2=\frac{-36}{7}$.
Koordinate trećeg vrha C su $(-1,4)$ ili $\left(\frac{25}{7},\frac{-36}{7}\right)$.
Primjenjujući formulu za računanje udaljenosti dvije tačke u pravouglom koordinatnom sistemu imamo $|AB|=\sqrt{26}$ i kako je $P=8$ to iz formule $P_{\Delta ABC}=\frac{|AB|\cdot v_c}{2}$ dobijamo da je $v_c=\frac{8}{13}\sqrt{26}$. Visina v_c je udaljenost vrha $C(x_c,y_c)$ od pravca AB kojem je jednačina $5x-y-7=0$. Dakle:

$v_c=\frac{|5x_c-y_c-7|}{\sqrt{26}}=\frac{8}{13}\sqrt{26} \Rightarrow |5x_c-y_c-7|=16$.

Smjenom $y_c=-2x_c+2$ dobijamo jednadžbu $|7x_c-9|=16$.
Dva su rješenja $C_1(-1,4)$ i $C_2\left(\frac{25}{7},\frac{-36}{7}\right)$.

Simboli. Formule

$A \cap B$ – presjek dva skupa
$A \cup B$ – unija dva skupa
$A \setminus B$ – razlika dva skupa
$n(A)$ – broj elemenata/članova datog skupa
$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \sphericalangle ABC, \dots$ – oznaka za uglove
$\alpha + \beta = 90°$ – komplementni uglovi
$\alpha + \beta = 180°$ – suplementni uglovi
susjedni i suplementni uglovi – uporedni uglovi
a – jednocifren broj
$10 \cdot b + a = \overline{ab}$ – dvocifren broj
$100 \cdot c + 10 \cdot b + a = \overline{abc}$ – trocifren broj
$x + y$ – zbir dva broja
$x - y$ – razlika dva broja
$x \cdot y$ – proizvod dva broja
$\frac{x}{y}$ – količnik dva broja
$n - 1, n, n + 1$ – tri uzastopna prirodna broja
$2n - 2, 2n, 2n + 2$ – tri uzastopna parna prirodna broja
$2n - 3, 2n - 1, 2n + 1$ – tri uzastopna neparna prirodna broja
$x = a \cdot y + r$ – broj zapisan uz pomoć zbira proizvoda količnika (a), djelioca (y) i ostatka (r)
$\frac{x \cdot a}{y \cdot a}$ – proširivanje razlomka
$\frac{x : a}{y : a}$ – skraćivanje razlomka
$\frac{x}{y} \pm \frac{z}{y} = \frac{x \pm z}{y}$ – sabiranje/oduzimanje razlomaka istih nazivnika
$\frac{a}{x} \pm \frac{b}{y} = \frac{a \cdot n \pm b \cdot n}{NZS(x, y)}$ – sabiranje/oduzimanje razlomaka različitih nazivnika
$\frac{x}{y} \cdot \frac{a}{b} = \frac{xa}{yb}$ – množenje razlomaka
$\frac{x}{y} : \frac{a}{b} = \frac{x : a}{y : b}$ – dijeljenje razlomaka
$\frac{x}{y} \rightarrow \frac{y}{x}$ – recipročna vrijednost zadatog razlomka
$\frac{x}{y} : \frac{a}{b} = \frac{x}{y} \cdot \frac{b}{a}$ – dijeljnje razlomaka ako se brojnici/nazivnici ne mogu podijeliti
$|a| = \begin{cases} a, a \geq 0 \\ -a, a < 0 \end{cases}$ – apsolutna vrijednost cijelog broja
$0.\dot{a} = 0.aaaa\dots$ – periodični decimalni broj
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$ – zbir uglova u trouglu

$\alpha + \beta + \gamma = 360° -$ zbir spoljašnjih uglova trougla

$\alpha + \alpha_1 = \beta + \beta_1 = \gamma + \gamma_1 = 180° -$ odnos unutrašnjeg i njemu susjednog spoljašnjeg ugla trougla
$\alpha + \beta = 90° \wedge \gamma = 90° -$ uglovi pravouglog trougla
$\alpha = \beta = \gamma = 60° -$ uglovi jednakostraničnog trougla
$2\alpha + \beta = 180° -$ zbir uglova jednakokrakog trougla
$a - b < c < a + b -$ odnos stranica trougla
$s_a, s_b, s_c -$ simetrale stranica trougla
$s_\alpha, s_\beta, s_\gamma -$ simetrale unutrašnjih uglova trougla
$t_a, t_b, t_c -$ težišnice trougla
$h_a, h_b, h_c -$ visine trougla
$a^0 = 1, a^1 = a$
$a^2 = a \cdot a -$ kvadriranje broja
$a^3 = a \cdot a \cdot a -$ kubiranje broja
$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n−faktora}} -$ stepenovanje broja
$(-a)^{2n} = a^{2n} -$ stepenovanje negativnog broja parnim eksponentom
$(-a)^{2n-1} = -a^{2n-1} -$ stepenovanje negativnog broja neparnim eksponentom
$a^m \cdot a^n = a^{m+n} -$ množenje brojeva istih baza
$a^m : a^n = a^{m-n} -$ dijeljenje brojeva istih baza
$(a^m)^n = a^{m \cdot n} -$ stepenovanje stepena
$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m -$ stepenovanje razlomka

$$\left.\begin{array}{l} a^{-n} = \frac{1}{a^n} \\ \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \end{array}\right\} - \text{stepenovanje negativnim eksponentom}$$

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b},\ a, b \geq 0 -$ množenje korijena istog stepena
$\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b},\ a \geq 0,\ b > 0 -$ dijeljenje korijena istog stepena
$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, a \geq 0, b > 0 -$ korjenovanje razlomka

$$\left.\begin{array}{r} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a \cdot b}}{\left(\sqrt{b}\right)^2} = \frac{\sqrt{a \cdot b}}{b}, a \geq 0, b > 0 \\ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} \cdot \frac{\sqrt{b} - \sqrt{c}}{\sqrt{b} - \sqrt{c}} = \frac{\sqrt{a \cdot b} - \sqrt{a \cdot c}}{\left(\sqrt{b}\right)^2 - (c)^2} = \frac{\sqrt{a \cdot b} - \sqrt{a \cdot c}}{b - c}, a \geq 0, b > 0, c > 0, b \neq c \\ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b} - \sqrt{c}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b} - \sqrt{c}} \cdot \frac{\sqrt{b} + \sqrt{c}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{\sqrt{a \cdot b} + \sqrt{a \cdot c}}{\left(\sqrt{b}\right)^2 - (c)^2} = \frac{\sqrt{a \cdot b} + \sqrt{a \cdot c}}{b - c}, a \geq 0, b > 0, c > 0, b \neq c \end{array}\right\}$$

racionalisanje nazivnika

$1\% = \frac{1}{100} = 0.01 -$ postotak
$y = p \cdot\ x -$ procentni iznos, $p -$ procenat, $x -$ glavna vrijednost/veličina

$y = x \pm p \cdot x -$ procentualno poskupljenje/povećanje ili pojeftinjenje/smanjenje
$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) -$ razlika kvadrata
$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2 -$ kvadrat zbira/razlike
$(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3 -$ kub zbira/razlike
$x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2) -$ zbir/razlika kubova
$ax \pm ay = a(x \pm y) -$ izlučivanje zajedničkog faktora ispred zagrade
$c^2 = a^2 + b^2 -$ Pitagorina teorema
$a{:}b = c{:}d \implies ad = bc -$ rješavanje proporcije
$d(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} -$ udaljenost dvije tačke u ravni
$P = \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)| -$ površina trougla u koordinatnom sistemu

$$ax = b \iff \begin{cases} x = \dfrac{b}{a}, a \neq 0 - \text{linearna jednadžba ima jedinstveno rješenje} \\ 0 \cdot x = b, a = 0 \wedge b \neq 0 - \text{linearna jednadžba je protivrječna} \\ 0 \cdot x = 0, a = b = 0 - \text{linearna jednadžba je neodređena} \end{cases}$$

$a -$ stranica kvadrata
$a, b -$ stranice pravougaonika
$d -$ dijagonala kvarata i pravougaonika
$O = 4a, P = a^2 -$ obim i površina kvadrata
$d = a\sqrt{2} -$ dijagonala kvadrata
$O = 2(a + b) = 2a + 2b, P = ab -$ obim i površina pravougaonika
$d = \sqrt{a^2 + b^2} -$ dijagonala pravougaonika
$a, b, c -$ stranice raznostraničnog trougla
$O = a + b + c, P = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2} -$ obim i površina trougla
$a -$ osnovica jednakokrakog trougla
$b -$ krak jednakokrakog trougla
$h -$ visina jednakokrakog trougla
$O = a + 2b, P = \frac{ah}{2} -$ obim i površina jednakokrakog trougla
$b^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 -$ krak jednakokrakog trougla
$a -$ stranica jednakostraničnog trougla
$h -$ visina jednakostraničnog trougla
$O = 3a, P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} -$ obim i površina jednakostraničnog trougla
$a, b -$ katete pravouglog trougla
$c -$ hipotenuza pravouglog trougla
$O = a + b + c, P = \frac{ab}{2} -$ obim i površina pravouglog trougla
$s -$ poluobim trougla
$s = \frac{a+b+c}{2} -$ poluobim trougla
$P = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)} -$ površina trogula
$r -$ poluprečnik opisanog kruga
$R -$ prečnik kruga

$\rho -$ poluprečnik opisanog kruga
$P = sr -$ površina trougla
$P = \frac{abc}{4\rho} -$ površina trougla
$a -$ osnovica romba
$h -$ visina romba
$d_1, d_2 -$ dijagonale romba
$O = 4a, P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{ah}{2} -$ obim i površina romba
$a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 -$ osnovica romba
$a, c -$ osnovice trapeza
$b, d -$ kraci trapeza
$O = a + b + c + d, O = a + 2b + c -$ obim trapeza i jednakokrakog trapeza
$P = \frac{a+c}{2} \cdot h -$ površina trapeza
$O = 2r\pi, P = r^2\pi -$ obim i površina kruga
$\alpha -$ centralni ugao kruga
$P_i = \frac{\alpha}{360°} \cdot r^2\pi -$ površina kružnog isječka
$P = \pi(r_1^2 - r_2^2) -$ površina kružnog prstena
$B -$ baza prizme, piramide, valjka, kupe
$M -$ omotač prizme, piramide, valjka, kupe
$H -$ visina prizme, piramide, valjka, kupe
$P -$ površina prizme, piramide, valjka, kupe
$V -$ zapremina prizme, piramide, valjka, kupe
$P = 2B + M, V = BH -$ površina i zapremina prizme i valjka
$P = B + M, V = \frac{1}{3}BH -$ zapremina prizme, piramide, valjka, kupe
$a -$ osnovica, osnovna ivica prizme, piramide
$h -$ visina bočne strane piramide
$s -$ bočna ivica kupe
$D -$ dijagonala prizme
$d -$ dijagonala bočne strane prizme, dijagonala osnove prizme i piramide
$P = 2a^2 + 4aH, V = a^2H -$ površina i zapremina pravilne četverostrane prizme
$P = 6a^2, V = a^3 -$ površina i zapremina kocke
$O_P = 2d + 2H, P_P = dH -$ obim i površina dijagonalnog presjeka pravilne četverostrane prizme
$d^2 = a^2 + H^2 -$ dijagonala bočne strane pravilne četverostrane prizme
$O_P = 2a + 2d, P_P = a^2\sqrt{2} -$ obim i površina dijagonalnog presjeka kocke
$D = a\sqrt{3} -$ dijagonala kocke
$P = 2(ab + ac + bc), V = abc -$ povšrina i zapremina kvadra
$O_P = 2c + 2d, P_P = cd -$ obim i površina dijagonalnog presjeka kvadra
$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} -$ dijagonala kvadra
$d^2 = a^2 + c^2, d^2 = a^2 + b^2, d^2 = b^2 + c^2 -$ dijagonala bočnih strana kvadra

$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3aH, V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}H -$ površina i zapremina pravilne trostrane prizme
$P = 3a^2\sqrt{3} + 6aH, V = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}H -$ povšrina i zapremina pravilne šestostrane prizme
$O_P = 4a + 2H, P_P = 2aH -$ obim i površina dijagonalnog presjeka šestostrane prizme
$d^2 = a^2 + H^2 -$ dijagonala bočne strane pravilne šestostrane prizme
$P = a^2 + 2ah, V = \frac{1}{3}a^2 \cdot H -$ povšrina i zapremina pravilne četverostrane piramide
$h^2 = H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 -$ visina bočne strane pravilne četverostrane piramide
$s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 -$ bočna ivica pravilne četverostrane piramide
$s^2 = H^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 -$ bočna ivica pravilne četverostrane piramide
$O_P = d + 2s, P_P = \frac{dH}{2} -$ obim i površina dijagonalnog presjeka pravilne četverostrane piramide
$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3ah}{2}, V = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2H -$ površina i zapremina pravilne trostrane piramide
$P = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} + 3ah, V = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2H -$ površina i zapremina pravilne šestostrne piramide
$s^2 = H^2 + a^2 -$ bočna ivica pravilne šestostrane piramide
$h^2 = H^2 + \frac{3a^2}{4} -$ visina bočne strane pravilne šestostrane piramide
$O_P = 2a + 2s, P_P = aH -$ obim i površina dijagonalnog presjeka pravilne šestostrane piramide
$P = 2r\pi(r + H), V = r^2\pi H -$ površina i zapremina valjka
$2r = H -$ odnos poluprečnika i visine jednakostranog valjka
$O_P = 4r + 2H, P_P = 2r \cdot H -$ obim i površina poprečnog presjeka valjka
$d_P^2 = H^2 + 4r^2 -$ dijagonala osnog presjeka valjka
$P = 6r^2\pi, V = 2r^3\pi -$ površina i zapremina jednakostranog valjka
$O_P = 8r, P_P = 4r^2 -$ obim i površina poprečnog presjeka jednakostranog valjka
$d_P^2 = 8r^2 -$ dijagonala osnog presjeka jednakostranog valjka
$P = r\pi(r + s), V = \frac{1}{3}r^2\pi H -$ povšrina i zapremina kupe
$s^2 = r^2 + h^2 -$ bočna ivica kupe
$O_P = 2r + 2s, P_P = rH -$ obim i površina poprečnog presjeka kupe
$H = r\sqrt{3} -$ odnos visine i poluprečnika jednakostrane kupe
$s = 2r -$ odnos poluprečnika i bočne ivice jednakostrane kupe
$P = 3r^2\pi, V = \frac{\sqrt{3}}{3}r^3\pi -$ površina i zapremina jednakostrane kupe
$O_P = 6r, P_P = r^2\sqrt{3} -$ obim i površina poprečnog presjeka jednakostrane kupe
$P = 4r^2\pi, V = \frac{4}{3}r^3\pi -$ površina i zapremina kugle
$x -$ poluprečnik malog kruga kugle
$d -$ udaljenost centra kugle od centra malog kruga kugle
$r^2 = x^2 + d^2 -$ poluprečnik kugla
$O_x = 2x\pi, P_x = x^2\pi -$ obim i površina malog kruga kugle